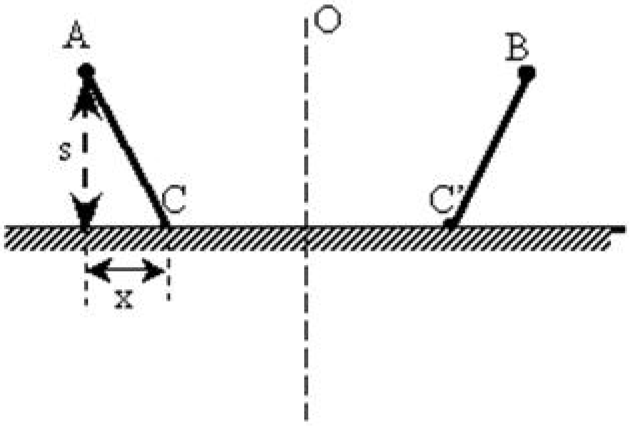
Задача 1**. Следует учесть, что при падении радиус капли увеличивается и «пополнению» надо сообщить скорость и импульс. Если обозначить процентное содержание воды в облаке (по объему) через *k*, основные дифференциальные уравнения процесса можно записать в виде**

Из первого уравнения можно выразить радиус капли через ее скорость и ускорение, а из второго получаем $\Delta r = \frac{k}{4}\int v \cdot dt = \frac{kL}{4}$. **Отсюда**

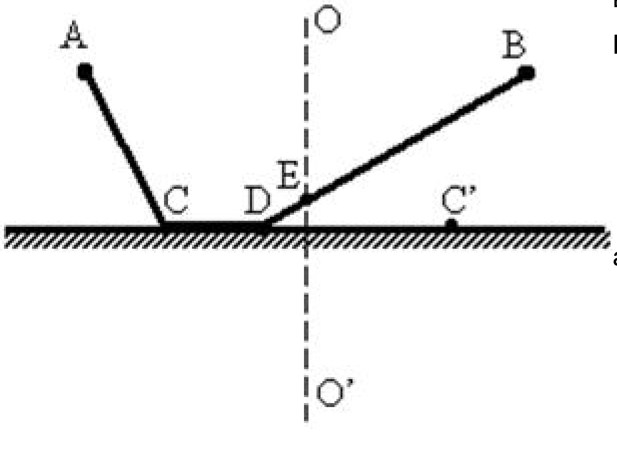
В частности, если ускорение неизменно, получим

Задача 2. Из всех возможных траекторий движения пловца из точки A в точку B через берег нужно найти такую, чтобы пловец затрачивал наименьшее время на ее преодоление, и сравнить время движения по этой траектории с L/V_1 - временем движения из A в B напрямую.



В поисках "выгодной" траектории достаточно рассмотреть траектории, симметричные относительно отрезка OO' (см. рис.), так как любая несимметричная траектория "неэкономична". Действительно, если существует несимметричная траектория, более выгодная, чем прямолинейный отрезок AB, например траектория ACDB (см. рис. 1.), легко построить "более выгодную" траекторию ACC'B (точки C и C' симметричны относительно OO').

Первый способ решения ("оптический"). Симметричную траекторию задает один параметр, например *x* (см. рис. 2) или угол $\angle \alpha = \angle PAC$. Обозначим возможное расстояние от точек A и B до берега *s*.



Время движения по отрезку AC (и AC') составляет

$$t_1 = \frac{AC}{V_1} = \frac{s}{V_1 \cos\alpha},$$

а время движения по отрезку CC' -

$$t_1 = \frac{CC'}{V_2} = \frac{L - 2s\,tg\,\alpha}{V_2}.$$

Таким образом, условие о том, что на берег забегать выгодно, записывается в виде

$$\frac{L}{V_1} > \frac{2s}{V_1 \cos\alpha} + \frac{L - 2s tg\alpha}{V_2} \quad (1)$$

Неравенство (1) должно выполняться хоть при каком-нибудь значении α, хотя бы в случае, когда траектория ACC'B самая оптимальная, то есть когда правая часть неравенства (1) минимальна. Минимум этот можно искать, например, приравнивая нулю производную по α этого выражения (такой путь решения тоже приводит к правильному ответу). Но мы здесь поступим иначе, воспользовавшись аналогией с оптикой. Известно, что из всех возможных траекторий свет выбирает наикратчайшую, наиболее выгодную по времени. Поэтому наиболее выгодным для пловца окажется двигаться по закону преломления, также, как двигался бы луч при переходе из среды с показателем преломления $n_1 = c/V_1$ в среду с показателем преломления $n_2 = c/V_2$. Поскольку пловец бежит вдоль берега, ситуация соответствует явлению полного внутреннего отражения:

$$\sin\alpha = n_2/n_1 = V_1/V_2. \quad (2)$$

Находя с помощью (2), что

$$\cos\alpha = \sqrt{V_2^2 - V_1^2}\,/V_2, \quad tg\alpha = V_1 / \sqrt{V_2^2 - V_1^2}$$

и подставляя эти значения в (1), легко выразим s:

$$s < \frac{L}{2}\sqrt{\frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}}$$

Второй способ решения

Записав неравенство (1), выразив все величины этого неравенства через переменную x, имеем:

$$\frac{L}{V_1} > \frac{2\sqrt{s^2 + x^2}}{V_1} + \frac{L - 2x}{V_2} \quad (3) -$$

Можно искать минимум правой части выражения (3), дифференцируя ее по x и приравнивая производную нулю (этот путь решения также приводит к правильному ответу). Однако неравенство (3) можно представить в виде

$$x^2\left(\frac{V_1^2}{V_2^2} - 1\right) + Lx\frac{(V_2 - V_1)V_1}{V_2^2} + L^2\frac{(V_2 - V_1)^2}{V_2^2} - s^2 > 0$$

В случае, когда дискриминант левой части неравенства меньше нуля, оно не выполняется при любом x, и, следовательно, любая ломаная траектория невыгодна. Случай, когда дискриминант больше нуля соответствует расположению точек А и В, удовлетворяющих условию задачи. Отсюда снова правильный ответ:

$$s < \frac{L}{2}\sqrt{\frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}},$$

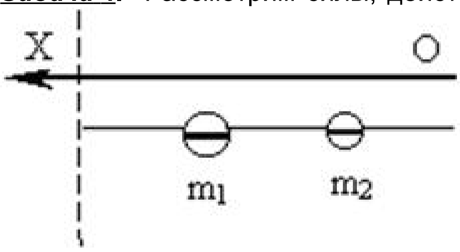
то есть берег должен быть не слишком далеко.

Задача 3. Магнитное поле вызывает в движущемся диэлектрике такую же поляризацию, какую вызвало бы внешнее электрическое поле направленное перпендикулярно обкладкам конденсатора. По

определению диэлектрической проницаемости где — напряженность поля, возникающего в результате поляризации. Интересующая нас разность потенциалов создается именно этим

полем, т.е. Следовательно,

Задача 4. Рассмотрим силы, действующие на бусинки. На первую, ближайшую к оси вращения бусинку,



действуют две силы, направленные к оси: сила Лоренца $qB\omega x_1$ и кулоновская сила взаимодействия между бусинками $kq^2/(x_2-x_1)^2$ (здесь x_1 и x_2 - расстояние от оси до стационарного положения первой и второй бусинки соответственно). На вторую бусинку также действуют две силы: сила Лоренца $qB\omega x_2$ (направленная к оси) и кулоновская сила $kq^2/(x_2-x_1)^2$ (направленная от оси).

В стационарном состоянии бусинки движутся по окружности. Таким образом, в проекции на направление OX (см. рисунок) уравнения движения бусинок выглядят так:

$$m_1\omega^2 x_1 = qB\omega\ x_1 + \frac{kq^2}{(x_2 - x_1)^2} \qquad (1)$$

$$m_2\omega^2 x_2 = qB\omega\ x_2 - \frac{kq^2}{(x_2 - x_1)^2} \qquad (2)$$

Перепишем систему (1), (2) в виде

$$b_1 x_1 = \frac{kq^2}{(x_2 - x_1)^2} \ (3), \qquad b_2 x_2 = -\frac{kq^2}{(x_2 - x_1)^2} \ (4),$$

где введен параметр $b_1 = m_1\omega^2 - qB\omega$ и параметр $b_2 = m_2\omega^2 - qB\omega$.

Параметр $b_1 > 0$, если частота вращения $\omega > \Omega_1$ - циклотронной частоты первой бусинки, $\Omega_1 = qB/m_1$. При $\omega < \Omega_1$ параметр $b_1 < 0$. Аналогично параметр $b_2 > 0$, если частота вращения $\omega > \Omega_2$ - циклотронной частоты второй бусинки, $\Omega_2 = qB/m_2$. При $\omega < \Omega_2$ параметр $b_2 < 0$.

Итак, в зависимости от того, как соотносится частота вращения бусинок ω с характерными частотами задачи Ω_1 и Ω_2 ($\Omega_1 < \Omega_2$ по условию), меняются знаки параметров b_1 и b_2, а также (как мы увидим дальше) режим решения.

При $\omega \geq \Omega_2$ ($b_2 \geq 0$) решения системы не существует, так как левая часть уравнения (4) положительна, а правая - отрицательна. Поэтому при таких больших ω обе частицы улетают на бесконечность.

При малых частотах вращения, $\omega \leq \Omega_1$ ($b_1 \leq 0$, $b_2 \leq 0$) решения системы (3), (4) вновь не существует (левая часть уравнения (3) отрицательна, а правая положительна). Первая частица установится на оси вращения ($x_1 = 0$), причем кулоновскую силу, действующую на нее будет компенсировать сила реакции оси, неучтенная в уравнении (1). Разрешая уравнение (2), которое остается справедливым, получим ответ:

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{kq^2}{(-b_2)}} = \sqrt[3]{\frac{kq^2}{qB\omega - m_2\omega^2}}$$

Рассмотрим устойчивость полученного решения. Первая частица удерживается силой реакции оси и прижимающей к оси кулоновской силой. Положение частицы устойчиво. Сдвинем немного вторую частицу от центра. Тогда отталкивающая ее от центра сила Кулона ослабнет, а прижимающая к центру сила Лоренца увеличится, и частица сместится обратно к центру. При сдвиге к центру ситуация противоположна. Положение второй частицы также устойчиво.

Осталось рассмотреть ситуацию $\Omega_1 < \omega < \Omega_2$ ($b_1 > 0$, $b_2 < 0$). Складывая уравнения (3) и (4), получаем

$$b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

$$b_2x_2 = -\frac{kq^2}{(x_2 - x_1)^2},$$

откуда находим

$$x_2 = -\frac{b_1}{b_2}x_1,$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{kq^2b_1^{\ 2}}{-b_2(b_1 + b_2)^2}}, \quad x_1 = \sqrt[3]{\frac{kq^2b_2^{\ 2}}{b_1(b_1 + b_2)^2}}$$

напомним, что $b_1 = m_1\omega^2 - qB\omega$, $b_2 = m_2\omega^2 - qB\omega$.

Анализ решения. Необходимо обеспечить $x_2 > x_1$, что соответствует $-b_2 < b_1$, или, пользуясь выражениями для b_1 и b_2, $\omega > 2qB/(m_1+m_2)$.

Полученное решение является неустойчивым. Действительно, если рассматривать обе частицы как единую систему, то по отношению к этой системе кулоновская сила оказывается внутренней и уравнение движения для такой системы получается сложением уравнений (1) и (2):

$$m_1\omega^2x_1+m_2\omega^2x_2 = qB\omega x_1+qB\omega x_2 \Rightarrow b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

Если сдвинуть обе частицы на одинаковое расстояние Δ от центра, то суммарная сила Лоренца уже не сможет обеспечить центростремительное ускорение:

$$b_1(x_1+\Delta) + b_2(x_2+\Delta) > 0$$

так как по результатам предыдущего пункта $b_1 > |b_2|$. В этом случае обе частицы уйдут на бесконечность.