

1. Знайти всі пари натуральних чисел  $(m, n)$  такі, що

$$(m^2 - n)(m + n^2) = (m + n)^3.$$

2. Два різні кола  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , з центрами в точках  $O_1$  і  $O_2$  відповідно, перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Пряма  $O_1B$  перетинає  $\omega_2$  в точці  $F$  ( $F \neq B$ ), а пряма  $O_2B$  перетинає  $\omega_1$  в точці  $E$  ( $E \neq B$ ). Через точку  $B$  провели пряму, паралельно до  $EF$ , яка перетинає  $\omega_1$  в точці  $M$  ( $M \neq B$ ), а  $\omega_2$  – в точці  $N$  ( $N \neq B$ ). Довести, що прямі  $ME$ ,  $AB$  і  $NF$  перетинаються в одній точці.

3. Нехай  $\mathbb{R}^+$  – множина додатних дійсних чисел. Знайти всі функції  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  такі, що виконується співвідношення

$$(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$$

для всіх  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

4. В кожній вершині трикутної піраміди написано число. На кожному ребрі записана сума чисел, що стоять на його кінцях.

Відомо, що сума чисел на ребрах рівна 3 і сума їх квадратів дорівнює 3. Які значення може приймати сума кубів чисел на ребрах?

5. Шахова фігура « кулеметник » б'є в якомусь одному напрямку по вертикалі або горизонталі ( наприклад, по горизонталі вліво) на довільну кількість клітинок. Яку найбільшу кількість таких, що не б'ють один одного, кулеметників можна поставити на шахівниці  $20 \times 20$ ?

Термін виконання роботи 4 години.

Використання калькулятора не дозволяється