1. Нехай n – таке натуральне число, що $2+2\sqrt{28n^2+1}$ – ціле число. Доведіть, що і $\sqrt{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ *також ціле число.*

2. Дано трикутник ABC. Пряма, яка проходить через вершину A, симетрична медіані AM відносно прямої, що містить бісектрису кута BAC, перетинає коло, описане навколо трикутника ABC, в точках A і K. Нехай L середина відрізка AK. Доведіть, що $\angle BLC = 2\angle BAC$.

3. Перша абетка, яку вивчають учні початківці Вінницької фізико-математичної гімназії №17, містить лише три літери $ф, м, г$. Обчисліть кількість слів, кожне з яких можна записати $2005-ма$ літерами цієї абетки і кожне з яких містить парну кількість літер $г$.

4. Доведіть, що для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

На розв'язання всього завдання відводиться 4 год.

Розв'язання завдань Турніру чемпіонів – 2005.

Задача 1. Нехай $2+2\sqrt{28n^2+1}=m$ – ціле число, тоді $4\left(28n^2+1\right)=\left(m-2\right)^2$. Це означає, що m – парне число, тобто $m=2k$, де k – натуральне. З урахуванням цього одержуємо, що $28n^2=k^2-2k$. Це означає, що k – парне число, тобто $k=2l$, де l – натуральне. Тоді $7n^2=l\left(l-1\right)$. З того, що $НСД\left(l;l-1\right)=1$, випливає, що $l=7x^2$ і $l-1=y^2$ або $l=x^2$ і $l-1=2y^2$, де x та y – цілі числа. У першому випадку одержуємо, що $-1\equiv y^2\pmod{7}$, а це неможливо. Тому, $m=2k=4l=4x^2$ – квадрат цілого числа, що і треба було довести.

Задача 2. Нехай N – середина AB. За умовою задачі $\angle BAM=\angle KAC$, а $\angle ABC=\angle AKC$ (як вписані, що спираються на одну і ту ж дугу). А це означає, що трикутники AMB і ACK – подібні (за двома кутами). Оскільки MN і CL – їх відповідні медіани, то $\angle CLK=\angle MNB$, а $\angle MNB=\angle CAB$, бо mn – середня лінія трикутника ABC. Отже, $\angle CLK=\angle BAC$. Аналогічно доводиться, що $\angle BLK=\angle BAC$. Тому, $\angle BLC=\angle BLK+\angle CLK=2\angle BAC$, що і треба було довести.

Задача 3. Застосуємо *метод рекурентних співвідношень.* Нехай x_n – кількість слів із n літер з парною кількістю літер $г$, а y_n – кількість слів із n літер з непарною кількістю літер $г$.

Тоді $x_n + y_n = 3^n$, $x_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}$ і $y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$. Дійсно, з одного боку, кількість всіх слів із n літер нашої абетки дорівнює $x_n + y_n$, а з другого боку, дорівнює 3^n, бо для запису кожної літери є 3 різних можливості, а далі використовуємо правило добутку.

Для доведення другого співвідношення помічаємо, що серед x_n слів існує y_{n-1} слів, які закінчуються на літеру $г$, а також існує $2x_{n-1}$ слів, які закінчуються на літеру $ф$ або $м$. Тому $x_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}$. Аналогічно доводиться і третє співвідношення.

Віднімаючи почленно від другого співвідношення – третє, одержуємо $x_n - y_n = x_{n-1} - y_{n-1}$. Звідси випливає, що

$$x_n - y_n = x_{n-1} - y_{n-1} = \ldots = x_1 - y_1 = 2 - 1 = 1.$$

Тому, розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_n + y_n = 3^n, \\ x_n - y_n = 1, \end{cases}$$

знаходимо, що $x_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{3^{2005} + 1}{2}$.

Задача 4. Спочатку доведемо таку допоміжну нерівність:

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

для будь-яких додотних x та y.

Дійсно, $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y}{x^2y^2} = \dfrac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$. Далі, запишимо такі три правильні нерівності

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{b}{c^2} + \frac{c}{b^2} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ і } \frac{c}{a^2} + \frac{a}{c^2} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{a}.$$

Додавши почленно ці нерівності, одержимо потрібну нерівність.

В.А. Ясінський, доцент кафедри алгебри *і методики викладання математики Вінницького державного педуніверситету ім. М. Коцюбинського, Заслужений вчитель України, Заступник голови журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, Голова журі з математики Турніру чемпіонів 2005.*