1. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа такі, що $a+b+c=1$. Доведіть, що

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1.$$

Розв'язання.

Зауважимо, що при допустимих a, b і c виконується нерівність

$$1+b-c=a+b+c+b-c=a+2b>0.$$

Тому за нерівністю Коші

$$\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\ge\sqrt[3]{1+b-c}.$$

Таким чином,

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\le a\left(\frac{1+1+1+b-c}{3}\right)=a+\frac{ab-ca}{3}. \qquad (1)$$

Аналогічно доводиться, що

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\le b\left(\frac{1+1+1+c-a}{3}\right)=b+\frac{bc-ab}{3}, \qquad (2)$$

$$c\sqrt[3]{1+a-b}\le c\left(\frac{1+1+1+a-b}{3}\right)=c+\frac{ca-bc}{3}. \qquad (3)$$

Додавши почленно нерівності (1) – (3), одержимо:

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le$$
$$\le a+\frac{ab-ca}{3}+b+\frac{bc-ab}{3}+c+\frac{ca-bc}{3}=$$
$$=a+b+c+\frac{ab+bc+ca-ca-ab-bc}{}=$$
$$=a+b+c.$$

Оскільки $a+b+c=1$, то одержимо бажаний результат.

2. Знайти усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння

$$x^3=y^3+2y^2+1.$$

Розв'язання. Нехай $y^2+3y>0$, тоді

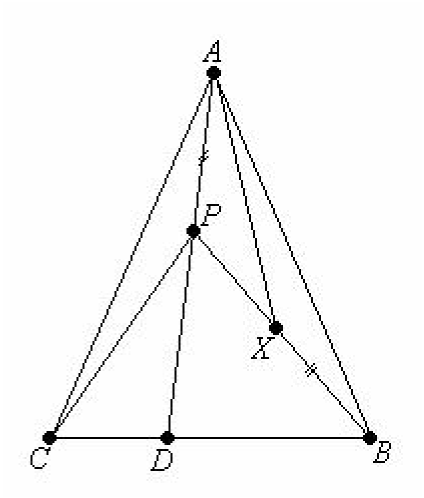
$$y^3<x^3<(y+1)^3,$$

що неможливо при цілих x та y. Тому $y^2+3y\le 0$. Звідки слідує, що $y\in\{-3;-2;-1;0\}$. Якщо $y=-3$, то $x=-2$. Якщо $y=-2$, то $x=1$. Якщо $y=-1$, то $x^3=2$, що неможливо при цілому x. Якщо $y=0$, то $x=1$.

Відповідь. $\{(1,0),(1,-2),(-2,-3)\}$.

3. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник, в якому $AB=AC$. Нехай D – точка на основі BC така, що $BD:DC=2:1$. Відмітимо на відрізку AD таку точку P, що $\angle BAC=\angle BPD$. Доведіть, що $\angle BPD=2\angle CPD$.

Розв'язання. Виберемо на відрізку BP точку X так, щоб $BX=AP$. Тоді $\angle ABX=\angle ABP=\angle DBP-\angle PAB=\angle CAB-\angle PAB=\angle CAP$. Оскільки $AB=CA$ і $BX=AP$, то трикутники ABX і CAP рівні. Звідси слідує, що $\angle DPC=\angle PXA$, зокрема $S_{ABX}=S_{CAP}$.



Далі, оскільки $BD=2CD$, то відстань від точки B до прямої AD в двічі більша за відстань від точки C до цієї прямої. А це означає, що $S_{ABP}=2S_{ACP}$. Враховуючи попередню рівність про площі, одержимо:

$$S_{ABX}+S_{AXP}=2S_{ABX},$$

тобто

$$S_{AXP}=S_{ABX}.$$

А це означає, що X – середина BP і $XP=BX=AP$. Оскільки трикутник рівнобедрений, то $\angle PXA=\angle XAP$. Тому, одержуємо, що

$$\angle BPD=\angle PXA+\angle XAP=2\angle PXA=2\angle CPD,$$

що і треба було довести.

4. Знайти всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що рівність

$$f(x-f(y))=1-x-y$$

виконується для всіх дійсних x та y.

Розв'язання. При $x=0$, $y=1$ маємо $f(-f(1))=0$. Отже, для $y=-f(1)$ одержуємо: $f(x)=1+f(1)-x$ для всіх дійсних x. Таким чином, шукана функція може мати вигляд $f(x)=a-x$, де $a=1+f(1)=const$.

Перевірка дає:

$$a-(x-(a-y))=1-x-y,$$

$$2a=1,$$

$$a=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

5. Петро з'їдає макітру вареників на a хвилин довше, ніж він це робить разом з Юрієм. Юрій з'їдає таку ж макітру вареників на b хвилин довше, ніж він це зробив би разом з Петром. За скільки хвилин з'їдають таку ж макітру вареників Петро і Юрій разом.

Розв'язання. Позначимо через t (*хв*) – шуканий час ($t>0$). Оскільки, за 1 *хв*, працюючи разом, Юра і Петро з'їдять частину макітри вареників, рівну $\frac{1}{t+a}+\frac{1}{t+b}$, то $t=\frac{1}{\frac{1}{t+a}+\frac{1}{t+b}}$, або $t(2t+(a+b))=t^2+(a+b)t+ab$.

Отже потрібно знайти додатний корінь рівняння $t^2=ab$.

Відповідь. $\sqrt{ab}$.