Нехай $x=3q+r_1$, $y=3p+r_2$, де r_1, r_2- остачі від ділення на 3, тобто числа 0,1,2.

Тоді $x^2+y^2=(3q+r_1)^2+(3p+r_2)^2=3(3q^2+3p^2+2qr_1+2pr_2)+r_1^2+r_2^2$.

Так як x^2+y^2 ділиться на 3, то $r_1^2+r_2^2$ теж ділиться на 3. Але $r_1^2+r_2^2$

Може приймати значення 0, 1, 2, 4, 5 або 8. Із них тільки 0 ділиться на 3, звідки

$r_1=r_2=0$. Отже. х та у діляться на 3.

1. Оскільки $a-b>0, b-c>0$, то

$$a+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}=c+\left(a-b+\frac{1}{a-b}\right)+\left(b-c+\frac{1}{b-c}\right)\geq$$

$$\geq c+2+2=c+4.$$

2. Медіана ML прямокутного трикутника AMC дорівнює половинам гіпотенузи AL та LC, а також відрізкам KL та KM, оскільки сторони трикутника KLM рівні.

   У трикутнику AKC медіана KL дорівнює половині сторони AC, тому кут AKC прямий, і у трикутнику ABC бісектриса AK є і висотою. Отже, трикутник ABC рівнобедрений (AB=AC), в якому AK є також медіаною: BK=KC. Значить, MK- медіана прямокутного трикутника BMC, а тому BC=2MK=2KL=AC.

   Отже, AB=BC=AC, що і слід було довести.

3. Розфарбуємо дошку в чотири кольори: 1- верхню ліву клітинку; 2 – дві клітинки по меншій діагоналі; 3 – три наступні діагональні клітинки і 4 – чотири наступні діагональні клітинки. Порахуємо, що клітинок другого кольору 26, а четвертого - 24. Кожна плитка 1 х 4 накриває по одній клітинці кожного кольору.

   Тому плитками 1х4 не можна замостити дошку, вказаних в умові розмірів, так як інакше клітинок кожного кольору було б порівно.

4. Оскільки кожне з чисел дорівнює модулю деякого числа, то усі числа невід'ємні.

Розглянемо найбільше (або одне із найбільших) чисел і позначимо числа $a_1, a_2, ..., a_{30}$ - за годинниковою стрілкою починаючи з цього числа. Покладемо $a_1 = A$ За умовою $a_1 = |a_2 - a_3|$. Оскільки числа a_2 та a_3 невід'ємні і не перевищують А , то написана рівність можлива лише в тому випадку коли одне із чисел a_2, a_3 дорівнює А , а друге дорівнює 0. Тому отримали два випадки: $a_2 = A$ та $a_2 = 0$. В першому випадку, знаючи a_1 та a_2, послідовно знаходимо $a_3 = 0, a_4 = A, a_5 = A, a_6 = 0$ і т.д.- числа повторюються з періодом 3.

В другому випадку аналогічним чином знаходимо: $a_3 = A, a_4 A, a_5 = 0, a_6 = A$ і т.д.- Знову числа повторюються з періодом 3. Отже, в будь-якому випадку, числа на колі повторюються з періодом А,А,0. Таким чином , серед 30 чисел 10 чисел – нулі, а двадцять чисел рівні між собою і дорівнюють А. Остаточно, знайдемо А з умови, що сума всіх чисел дорівнює 1. Маємо: 20А=1, звідки А=1/20.

Відповідь: 10 чисел-нулі; 20 чисел А=1/20 .