1. Послідовність цілих чисел a_1, a_2, a_3, *… така, що для будь-якого натурального* n

$$a_n = \begin{cases} n^2 - n, \text{ якщо } n^2 - n \text{ ділиться на } 4, \\ n - n^2, \text{ у інших випадках.} \end{cases}$$

Знайдіть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2008}$.

Розв'язання. Досліджуючи остачі від ділення $n^2 - n$ на 4, одержуємо, що $n^2 - n$ ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли $n \equiv 0 \pmod 4$ чи $n \equiv 1 \pmod 4$.

Тому

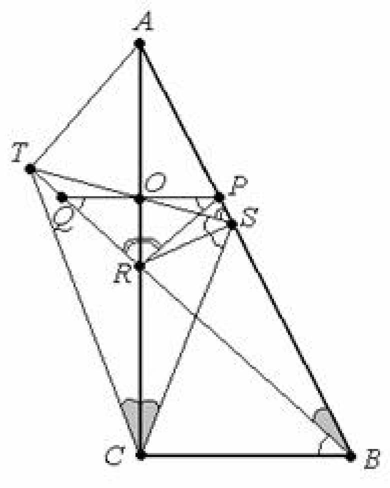
$$\sum_{i=1}^{2008} a_i = \sum_{k=0}^{501} \left(a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4}\right) = \sum_{k=0}^{501} (4) = 2008,$$

бо

$$a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4} =$$
$$= (4k+1)^2 - (4k+1) - (4k+2)^2 + (4k+2) -$$
$$-(4k+3)^2 + (4k+3) + (4k+4)^2 - (4k+4) = 4.$$

Відповідь. 2008.

2. *Дано прямокутний трикутник* ABC, *в якому* $\angle C = 90^0$. *На його гіпотенузі* AB *довільним чином відмітили точку* P. *Точка* Q *симетрична точці* P *відносно* AB. *Нехай прямі* PQ *і* BQ *перетинають пряму* AC *в точках* O *і* R *відповідно. Позначимо через* S *основу перпендикуляра, опущеного із точки* R *на пряму* AB $(S \neq P)$, *а через* T *– точку перетину прямих* OS *і* BR. *Доведіть, що* R *– центр кола, вписаного в трикутник* CST.



Розв'язання. Нехай точка S належить відрізку BP (у випадку, коли точка S належить відрізку AP, доведення аналогічне). Достатньо довести, що R – точка перетину бісектрис трикутника CST.

Оскільки точка Q симетрична точці P відносно прямої AC, то AC – серединний перпендикуляр відрізка PQ. Отже, точки R, O, P, S та R, S, B, C – циклічні.

Тому

$$PQ\square BC$$

та

$$\angle RSC = \angle RBC = \angle QBC = \angle BQP = \angle RQP = \angle RPQ = \angle RPO = \angle RSO = \angle RST,$$

тобто SR – бісектриса кута CST.

Далі

$$\angle TRA = \angle QRO = \angle PRO = \angle PSO = \angle AST,$$

тобто точки T, R, S, A також циклічні. Звідки слідує, що $\angle ATR = \angle ASR = 90^0$. Тому, $\angle BTA = 90^0 = \angle BCA$, а це означає, що точки A, B, C, T – циклічні. Звідки слідує, що

$$\angle TCA = \angle TBA = \angle RBS = \angle RCS,$$

тобто CR – бісектриса кута SCT.

Таким чином, ми довели, що R – точка перетину бісектрис трикутника CST, що і треба було довести.

3. *Нехай a, b, c – додатні дійсні числа. Доведіть нерівність*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ge \frac{2(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

Розв’язання. Розглянемо наступну різницю:

$$\square(a,b,c) = 3(ab+bc+ca)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\right)-2(a+b+c)^3.$$

Її можна подати у такому вигляді:

$$\square(a,b,c) = \left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)+3\left(\frac{ab^3}{c}+\frac{bc^3}{a}+\frac{ca^3}{b}-a^2b-b^2c-c^2a\right).$$

Для цього потрібно розкрити дужки, звести подібні доданки і згрупувати їх відповідним чином. Далі залишилося довести, що обидві дужки невід’ємні.

Дійсно, за нерівністю Коші для трьох додатних чисел та двох додатних чисел маємо:

1)

$$a^3+b^3+c^3\ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}=3abc,$$

тобто

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0,$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b=c$.

2)

$$\frac{ab^3}{c}+\frac{bc^3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab^3}{c}\cdot\frac{bc^3}{a}}=2b^2c,$$

$$\frac{bc^3}{a}+\frac{ca^3}{b}\ge 2\sqrt{\frac{bc^3}{a}\cdot\frac{ca^3}{b}}=2c^2a,$$

$$\frac{ca^3}{b}+\frac{ab^3}{c}\ge 2\sqrt{\frac{ca^3}{b}\cdot\frac{ab^3}{c}}=2a^2b.$$

Додавши ці три нерівності, одержимо:

$$2\left(\frac{ab^3}{c}+\frac{bc^3}{a}+\frac{ca^3}{b}\right)\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right),$$

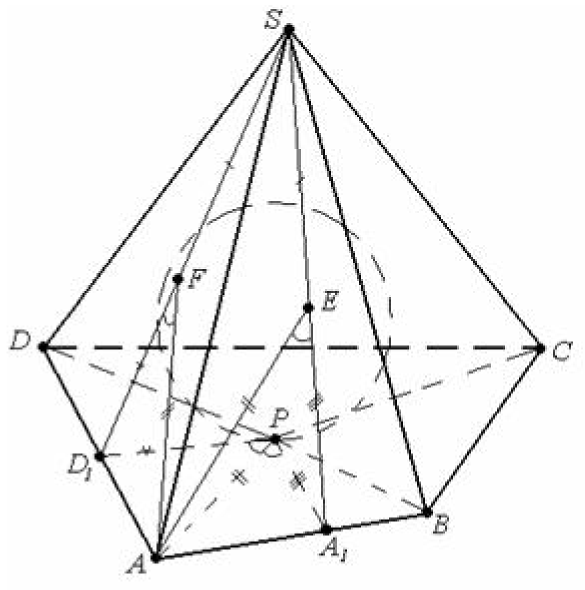
тобто

$$\frac{ab^3}{c}+\frac{bc^3}{a}+\frac{ca^3}{b}-a^2b-b^2c-c^2a\ge 0,$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b=c$.

4. *Дано чотирикутну піраміду $SABCD$, основою якої є опуклий чотирикутник $ABCD$. Відомо, що в піраміду можна вписати кулю. Нехай P – точка дотику цієї кулі з основою $ABCD$. Доведіть, що $\angle APB+\angle CPD=180^0$.*

Розв’язання. Нехай E і F – точки дотику вписаної кулі з гранями ASB і ASD (див. мал.). Тоді за теоремою про дотичні до сфери, які проведені із однієї точки, маємо: $SE=SF$, $AE=AF$. Звідси випливає, що трикутники AES і AFS рівні (за трьома сторонами).



Нехай SE перетинає AB в точці A_1, а SF перетинає AD в точці D_1. Тоді з рівності трикутників AES і AFS випливає, що $\angle AEA_1 = \angle AFD_1$ (як відповідні зовнішні кути рівних трикутників).

Далі, аналогічно, $A_1E = A_1P$ і $D_1F = D_1P$, а тому $\triangle AEA_1 = \triangle APA_1$ і $\triangle AFD_1 = \triangle APD_1$. З того, що $\angle AEA_1 = \angle AFD_1$, випливає, що $\angle APA_1 = \angle APD_1 = \alpha$.

Нехай прямі, що проходять через вершину S і точки дотику кулі з гранями BSC і CSD, перетинають BC в точці B_1, а CD в точці C_1. Тоді, за доведеним вище, $\angle A_1PB = \angle BPB_1 = \beta$, $\angle B_1PC = \angle CPC_1 = \gamma$ і $\angle C_1PD = \angle DPD_1 = \delta$. Оскільки сума усіх кутів з вершиною P дорівнює 360°, то

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ,$$

тобто

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Таким чином,

$$\angle APB + \angle CPD =$$
$$= (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ.$$

5. *Знайти усі натуральні числа n такі, що:*

1) n має всього 6 різних дільників;

2) $1 + n = 5(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$ – правильна рівність.

Розв'язання. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n. Тоді кількість усіх його дільників буде рівною $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$. За умовою задачі $\tau(n) = 6$.

Тому, $k=1$ і $\alpha_1=5$ або $k=2$ і $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ (ми припустили, що $\alpha_1\le\alpha_2$). У першому випадку $n=p^5$, де p – просте число. Для цього числа не виконується друга умова:

$$1+p^5=5\left(p+p^2+p^3+p^4\right)=5p\left(1+p+p^2+p^3\right),$$

що неможливо, бо ліва частина не ділиться на p, а права – ділиться.

У другому випадку $n=pq^2$, де p і q – різні прості числа. Знайти їх можна завдяки другій умові:

$$1+pq^2=5\left(p+q+pq+q^2\right).$$

Звідки знаходимо, що

$$p=\frac{5q^2+5q-1}{q^2-5q-5}=5+\frac{30q+24}{q^2-5q-5}.$$

Оскільки p – ціле , то $\frac{30q+24}{q^2-5q-5}$ – ціле. Якщо $q>35$, то $0<30q+24<q^2-5q-5$, що не забезпечує цілісності числа $\frac{30q+24}{q^2-5q-5}$ Отже, $q\le 35$. Оскільки q – просте, то

$$q\in\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31\}.$$

Безпосередньою перевіркою знаходимо, що $q=7$, а $p=31$. Отже, шукане число $n=31\cdot 7^2=1519$.

Відповідь. $n=1519$.