1. $(a-b)^2 \geq 0$, *поэтому* $a^2+b^2 \geq 2ab$. *Аналогично* $b^2+c^2 \geq 2bc, c^2+a^2 \geq 2ac$, *а также*

$a^4+b^4 \geq 2a^2b^2, b^4+c^4 \geq 2b^2c^2, c^4+a^4 \geq 2c^2a^2$. Сложив почленно последние три неравенства получим

$$2(a^4+b^4+c^4) \geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 = a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2).$$

Усилим данное неравенство, применив первые три неравенства:

$$2(a^4+b^4+c^4) \geq 2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab.$$

Сократив на 2, получим требуемое неравенство.

2. Каждая команда может сыграть не более 29 матчей. Поэтому, если каждая команда сыграла по крайней мере один матч, то различных чисел, выражающих количество матчей, сыгранных отдельными командами, может быть всего 29 (от 1 до 29). , по крайней мере у двух команд число сыгранных партий должно быть одно и то же в любой момент игры. Если хотя бы одна команда ещё не играла, то эти числа могут быть от 0 до 28, т. е. тоже 29 различных возможностей, и вывод остается тот же.

3. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{y} = \sqrt{250} - \sqrt{x}$. Возведём его почленно в квадрат: $y = 250 + x - 2\sqrt{250x}$. Число 250+*x* – целое при целом *x* . Следовательно, необходимо, чтобы $\sqrt{250x}$ был целым. Для этого необходимо, чтобы $250x=p^2$ или $x=10k^2$, где *k* – целое. Кроме того, поскольку $\sqrt{y}$ должен быть неотрицательным, надо, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$ или $x \leq 250, 10k^2 \leq 250, |k| \leq 5$. Подставляя возможные значения *k* в выражение для $x=10k^2$ и $y=10(|k|-5)^2$, получим все решения.

4. Допустим, такие числа существуют. Тогда $xy+1=U^2, yz+1=V^2, zx+1=W^2$, где U, V, W - четные числа, т.е. $U=2a, V=2b, W=2c$. Таким образом, $xy=4a^2-1, yz=4b^2-1, zx=4c^2-1$. Перемножив эти равенства получим: $(xyz)^2 = 4A-1$, где А некоторое натуральное число. Мы получили противоречие, так как квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1.

5. Обозначим точку пересечения AC_1 и CA_1 через К. Так как $AA_1 \| CC_1$, то треугольники AA_1K и C_1CK подобны, поэтому

$\frac{CK}{KA_1} = \frac{C_1K}{KA} = \frac{CC_1}{AA_1}$. Так как $\angle A_1BA = \angle CBC_1$, то прямоугольные треугольники

CC_1B и AA_1B подобны, и $\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{A_1B}$. Значит, $\frac{C_1K}{KA} = \frac{C_1B}{A_1B}$, то есть

$BK \,||\, CC_1 \Rightarrow BK \perp A_1C_1$ и BK - биссектриса внутреннего угла B (так как перпендикулярна биссектрисе внешнего угла).

Замечание. В трапеции точка пересечения диагоналей делит пополам отрезок с концами на боковых сторонах, проходящий через эту точку и параллельный основаниям, поэтому К – середина отрезка BB_1.