1. *Послідовність цілих чисел* a_1, a_2, a_3, *… така, що для будь-якого натурального* n

$$a_n=\begin{cases} n^2-n, \text{ якщо } n^2-n \text{ ділиться на } 4, \\ n-n^2, \text{ у інших випадках.} \end{cases}$$

Знайдіть $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2004}$.

2. *Дано прямокутний трикутник* ABC, *в якому* $\angle C=90^\circ$. *На його гіпотенузі* AB *довільним чином відмітили точку* P. *Точка* Q *симетрична точці* P *відносно* AB. *Нехай прямі* PQ *і* BQ *перетинають пряму* AC *в точках* O *і* R *відповідно. Позначимо через* S *основу перпендикуляра, опущеного із точки* R *на пряму* AB $(S\neq P)$, *а через* T *– точку перетину прямих* OS *і* BR. *Доведіть, що* R *– центр кола, вписаного в трикутник* CST.

3. *Нехай* a, b, c *– додатні дійсні числа. Доведіть нерівність*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\geq\frac{2(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

4. *Дано чотирикутну піраміду* $SABCD$, *основою якої є опуклий чотирикутник* $ABCD$. *Відомо, що в піраміду можна вписати кулю. Нехай* P *– точка дотику цієї кулі з основою* $ABCD$. *Доведіть, що* $\angle APB+\angle CPD=180^\circ$.

5. *Знайти усі натуральні числа* n *такі, що:*

1) n *має всього* 6 *різних дільників:* $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$.

2) $1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$ *– правильна рівність.*

Час виконання – 3 год., кожна задача оцінюється в 5 балів, використання калькуляторів та довідників заборонено

1. Последовательность целых чисел a_1, a_2, a_3, *… такая, что для любого натурального*

n

$$a_n=\begin{cases} n^2-n, \text{ якщо } n^2-n \text{ ділиться на } 4, \\ n-n^2, \text{ у інших випадках.} \end{cases}$$

Найти $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2004}$.

2. *Дан прямоугольный треугольник* ABC, *в котором* $\angle C=90^\circ$. *На его гипотенузе* AB *произвольным образом отметили точку P. Точка Q симметрична точке P относительно AB. Пусть прямые* PQ *и* BQ *пересекают прямую* AC *в точках* O *и* R *соответственно. Обозначим через* S *основание перпендикуляра, опущеного с точки* R *на прямую* AB

$(S \neq P)$, а через T - точку пересечения прямых OS и BR. Докажите, что R- центр окружности, вписаной в треугольник CST.

3. *Пусть* a, b, c- *положительные действительные числа.*

Докажите неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \geq \frac{2(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}$.

4. *Дано четырехугольную пирамиду* $SABCD$, *основанием которой есть выпуклый четырехугольник* $ABCD$. *Известно, что в пирамиду можно вписать шар. Пусть* P*-точка касания этого шара с основанием* $ABCD$.

Докажите, что $\angle APB + \angle CPD = 180^0$.

5. *Найти все натуральные числа* n *такие, что:*

1) n *имеет всего 6 различных делителей:* $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$

2) $1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$- *верное равенство.*

Время выполнения – 3 часа, каждая задача оценивается в 5 баллов, использование калькуляторов и справочников запрещено