1. Розв’зати в цілих числах рівняння

$$\left(x^2-y^2\right)^2=1+16y.$$

Права частина рівності невід’ємна, так як дорівнює квадрату числа, отже, $y\ge 0.$

Тоді ліва частина не менша $(2y-1)^2$, так як модуль різниці y^2 та довільного квадрату цілого числа (якщо $y\ge 0$ і квадрати різні) не менший $(2y-1).$

Маємо $(2y-1)^2\le 1+16y$, звідки $y\le 5.$ Отже, права частина може набувати значень: 1, 17, 33, 49, 65, 81. Із них тільки 1, 49 та 81 є квадратами.

Розглянемо три випадки:

1) $\begin{cases} y=0, \\ \left(x^2\right)^2=1, \end{cases}$ **звідки** $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=3, \\ \left(x^2-9\right)^2=49, \end{cases}$ **звідки** $\begin{cases} y=3, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=16, \\ x^2=2, \end{array}\right. \end{cases}$ **тобто** $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=5, \\ \left(x^2-25\right)^2=81, \end{cases}$ **звідки** $\begin{cases} y=5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=34, \\ x^2=16, \end{array}\right. \end{cases}$ **тобто** $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=5. \end{cases}$

Відповідь: $(\pm 1;0);(\pm 4;3);(\pm 4;5)$

2. Чи існують дійсні числа b та c такі, що кожне із рівнянь

$x^2+bx+c=0$ та $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ має по два цілих корені?

Припустимо що такі b та c знайшлися, тоді, якщо k та l - корені рівняння $x^2+bx+c=0,$ а m та n- корені рівняння $2x^2+(b+1)x+c+1=0$, то за теоремою Вієта

$k+l=-b$ (1)

$kl=c$ (2)

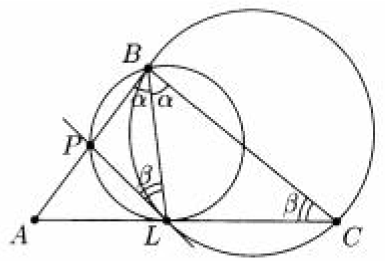
$2(m+n)=-b-1$ (3)

$2mn=c+1.$ (4)

Із (4) видно, що c- ціле непарне число. Тому числа k та l або непарні, а сума їх (яка дорівнює $-b$) – ціле парне число. Але тоді число $(-b-1)$ непарне і рівність (3) не можлива. Отримане протиріччя доводить, що таких чисел b та c не існує.

3. В трикутнику ABC проведено бісектрису BL. Через точку L до кола, описаного навколо трикутника BLC, проведено дотичну, яка перетинає сторону AB в точці P. Доведіть, що пряма AC дотикається кола, описаного навколо трикутника BPL.

Розв'язання. Достатньо показати, що $\angle PLA = \angle PBL$.



Позначимо $\alpha = \angle ABL = \angle LBC$, $\beta = \angle BCL$. Оскільки PL дотикається кола, описаного навколо трикутника BLC, робимо висновок, що $\angle PLB = \angle BCL = \beta$.

Кут ALB - зовнішній для трикутника BLC, тому $\angle ALB = \alpha + \beta$.

З іншого боку , $\angle ALB = \angle PLA + \beta$, отже , $\angle PLA = \alpha = \angle PBL$.

4. На деякому острові, на якому живуть лише лицарі, котрі завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть, оголосили вибори мера. Кожний із n кандидатів на цю посаду, зробив заяву, а саме: k-й претендент $(1 \le k \le n)$ сказав: « Не рахуючи мене, серед претендентів брехунів на k більше, ніж лицарів». Скільки чоловік претендувало на посаду мера?

Серед претендентів не більше одного лицаря. Якщо всі претенденти брехуни, то $n = 1$, так як в іншому випадку передостанній брехун буде говорити правду. Якщо серед претендентів є лицар, то він буде $(n-1)$ -м претендентом. Доведемо, що $n \le 3$. Припустимо, що $n \succ 3$. Тоді $(n-3)$-й претендент – брехун. З іншого боку, крім нього іще є $(n-2)$ брехуни та один лицар, так що $(n-3)$-й претендент говорить правду. Отримали протиріччя. Залишилось показати, що випадки $n = 2$ та $n = 3$ реалізовуються: лицар, брехун ($n = 2$) та брехун, лицар, брехун ($n = 3$).

Відповідь: один, два або три чоловіки.

5. Для множини невід'ємних цілих чисел $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$ позначимо через $A+A$ – множину всіх чисел виду a_i+a_j, а через $A-A$ – множину всіх чисел виду a_i-a_j, де i та j пробігають всі можливі цілі значення від 1 до k. Наприклад, для $A=\{1, 2, 3, 4\}$ матимемо: $A+A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

а $A-A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Чи може трапитися так, щоб число елементів в $A+A$ було більшим за число елементів в $A-A$?

Розв'язання. Так, може. Для множини $A=\{0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14\}$ матимемо:

$A+A=[0;28]\setminus\{1, 20, 27\}$, а $|A+A|=26$;

$A-A=[-14;14]\setminus\{-13, -6, 6, 13\}$, а $|A-A|=25$.