

1. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$

2. Чи існують дійсні числа  $b$  та  $c$  такі, що кожне із рівнянь  $x^2 + bx + c = 0$  та  $2x^2 + (b+1)x + c+1 = 0$  має по два цілих корені?

3. В трикутнику ABC проведено бісектрису BL. Через точку L до кола, описаного навколо трикутника BLC, проведено дотичну, яка перетинає сторону AB в точці P. Доведіть, що пряма AC дотикається кола, описаного навколо трикутника BPL.

4. На деякому острові, на якому живуть лише лицарі, котрі завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть, оголосили вибори мера. Кожний із  $n$  кандидатів на цю посаду, зробив заяву, а саме:  $k$ -й претендент ( $1 \leq k \leq n$ ) сказав: «Не рахуючи мене, серед претендентів брехунів на  $k$  більше, ніж лицарів». Скільки чоловік претендувало на посаду мера?

5. Для множини невід'ємних цілих чисел  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $k \geq 2$  позначимо через  $A + A$  – множини всіх чисел виду  $a_i + a_j$ , а через  $A - A$  – множини всіх чисел виду  $a_i - a_j$ , де  $i$  та  $j$  пробігають всі можливі цілі значення від  $1$  до  $k$ . Наприклад, для  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  матимемо:  $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  
а  $A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Чи може трапитися так, щоб число елементів в  $A + A$  було більшим за число елементів в  $A - A$ ?