1. При виготовленні партії з $N \geq 5$ монет робітник помилково виготовив дві монети з іншого матеріалу (всі монети виглядають однаково). Начальник знає, що таких монет рівно дві, що вони важать однаково, але відрізняються за вагою від інших. Робітник знає, які це монети і те, що вони легші від решти. Йому потрібно, провівши два зважування на шалькових терезах без гир, переконати начальника в тому, що фальшиві монети легше справжніх, і в тому, які монети фальшиві. Чи може він це зробити?

Нехай m_1 та m_2- фальшиві монети, m_3, m_4 та m_5- будь-які три із справжніх монет.

Робітник робить два таких зважування:

$$m_1 \vee m_3$$

$$m_4 + m_5 \vee m_2 + m_3$$

В результаті начальник переконується, що $m_1 < m_3$ та $m_4 + m_5 > m_2 + m_3$.

Із першого зважування він робить висновок, що m_1- біль легка монета, ніж m_3, а з другого зважування- що серед монет m_4 та m_5 важчих монет більше, ніж серед монет m_2 та m_3.

Таким чином, він робить висновок, що m_4та m_5- важкі монети, а m_2- легка.

В підсумку він бачить три важкі монети та дві легкі, а оскільки він знає, що фальшивих монет рівно дві, то він переконується в тому, що фальшивими монетами є саме легкі монети m_1та m_2.

2. Знайдіть всі пари (x; y) цілих чисел x і y, що задовольняють рівність.

$$x^4 + x^3y + 2x^2 + y + 1 = x^3 + x$$

Маємо

$$x^4 + x^3y + 2x^2 + y + 1 = x^3 + x \Leftrightarrow x^4 + x^3(y-1) + 2x^2 - x + y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + xy + y + 1) = 0.$$

Рівняння $x^2 - x + 1 = 0$ коренів немає. Розглянемо рівняння

$$x^2 + xy + y + 1 = 0.$$

Маємо

$x^2+xy+y+1=0 \Leftrightarrow y(x+1)=-x^2-1.$

Очевидно, що $x=-1$ не є розв'язком рівняння, тому $y=-\frac{x^2+1}{x+1}=-(x-1)-\frac{2}{x+1}.$

Для того, щоб y був цілим, необхідно, щоб цілим було число $\frac{2}{x+1}$. Потому x може набувати значень $-3,-2,0,1.$ Відповідно y буде набувати значень $5,5,-1,-1.$

Перевіркою переконуємося, що пари $(-3;5),(-2;5),(0;-1),(1;-1)$ задовольняють вихідному рівнянню.

3. На олімпіаді з математики, яка проводиться протягом двох днів, брало участь 30 дев'ятикласників. У кожний із днів кожен учасник отримав ціле невід'ємне число балів, яке не перевищує 40. Ніякі два учасники ні в перший, ні в другий день не отримали однакову кількість балів. У другий день завдання були складніші, ніж у перший день, і тому кожен учасник другого дня отримав менше балів, ніж у перший день.

Яке найбільше число дев'ятикласників могло в сумі за два дні отримати однакове число балів?

Наступний приклад показує, що число таких дев'ятикласників могло дорівнювати 11.

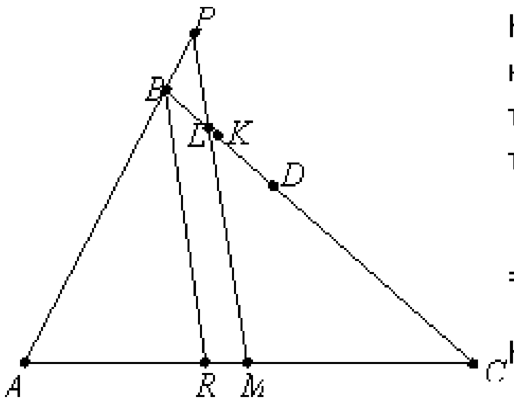
Наведемо кількість балів, набраних учасниками за перший та другий день:

11, 12, 13, …,20, 21, 22, 23, 24,…,39, 40
10, 9, 8, …,1, 0, 12, 13, 14, …,29, 30.

Необхідно довести, що 12 дев'ятикласників бути не може.

4. Дано трикутник ABC, у якого $AB < BC$. Точка D на стороні BC така, що $AB = DC$. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AC та BD, паралельна бісектрисі кута ABC.

(Р. Г. Женодаров, Уфа)



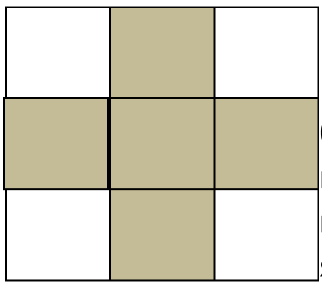
Нехай K – середина BD, M – середина AC, BR – бісектриса кута ABC, ML – пряма, паралельна BR , яка перетинає BC в точці L, а пряму AB – в точці P. Необхідно довести, що точки *L* та *K* співпадають. Позначимо *AB* = *CD* = *x*, *BK* = *KD* = *y*. За властивістю бісектриси $\frac{AR}{RC}=\frac{AB}{BC}=\frac{x}{x+2y}$.

Нехай *AR* = *xt*, *RC*= (*x* + 2*y*)*t*. Тоді $AM=\frac{xt+(x+2y)t}{2}=(x+y)t,$ *RM*= *yt*. За теоремою Фалеса $\frac{AR}{RM}=\frac{AB}{BP}=\frac{x}{y}$.

Так як *AB* = *x*, то *BP* = *y*. Оскільки *BR*- бісектриса, а прямі *BR* та *ML* паралельні, то $\angle$*BPL* =$\angle$*ABR* = $\angle$*RBL* = $\angle$*BLP*. Отже, трикутник *BPL* рівнобедрений, *BP* = *BL* = *y*. Це означає, що точки *L* та *K* співпадають.

5. Розглядаються трикутники, всі вершини кожного із яких лежать на трьох різних сторонах даного квадрата. Знайти геометричне місце точок центрів ваги таких трикутників.

(С. І. Токарєв, Іваново)



Шукане ГМТ – фігура, яка складається з п'яти зафарбованих квадратів без границь. Розглянемо точку, яка належить верхньому або центральному закфарбованим квадратам. Проведемо пряму, паралельну верхній стороні квадрата нижче даної точки, відстань від якої до даної точки удвічі менша відстані від точки до верхньої сторони великого квадрата. Точки перетину цієї прямої зі сторонами квадрата візьмемо за дві вершини трикутника. Побудуємо середину цієї сторони і проведемо пряму через цю точку і дану точку. Перетин цієї прямої з верхньою стороною квадрата – третя вершина трикутника. Дана точка є центром ваги цього трикутника.

Доведемо, що центр ваги не може належати білим квадратам. Розглянемо точку в лівому верхньому квадраті. Тоді вершина трикутника не може лежати на правій і на нижній стороні. Отже, вершини належать тільки двом сторонам квадрата, що суперечить умові.