Задача 1

Проследим за *изменениями механической энергии* тела во время полета. Начальная энергия $W_0 = mv_0^2/2 = 200m$ Дж. В верхней точке $W_1 = mgh = 147m$ Дж ($g = 9.8$м/с^2). Перед соприкосновением с землей $W_2 = mv_2^2/2 = 84.5m$ Дж. Нетрудно догадаться, что уменьшение энергии связано с сопротивлением воздуха. Однако, потери энергии по пути вниз $W_1 – W_2 = 62.5m$ Дж *оказываются большими*, чем потери энергии $W_0 – W_1 = 53m$ Дж при движении вверх. Этого не может быть, так как скорость при движении вниз *меньше*, чем на том же уровне при движении вверх (механическая энергия уменьшается), а сопротивление воздуха уменьшается с уменьшением скорости. То есть некоторые измерения были ошибочными.

Задача 2

Очевидно, что положение, когда *оба пузырька находятся на катетах*, не будет равновесным, т. к. оба пузырька поплывут вверх. Не будет равновесным и состояние, когда *один из пузырьков находится на катете*, другой – на гипотенузе. В этом случае тот, который на гипотенузе, поплывет вверх, а соответствующее уменьшение высоты того, что на катете будет меньшим. В результате *один из пузырьков достигнет верхнего угла*, а второй остановится на нижнем катете, не доставая до прямого угла $a/\sqrt{2}$, где а – длина катета. Это и будет состояние устойчивого равновесия. Строго говоря, таких состояния два – «первый пузырек вверху» и «второй пузырек вверху». Между двумя устойчивыми состояниями всегда существует неустойчивое. В данном случае это состояние, когда *один из пузырьков находится в нижнем углу*, «упираясь» в внутренний изгиб трубки. Состояний безразличного равновесия в данной системе не будет.

Задача 3

Позначимо радіус орбіти r, маси Землі та супутника відповідно M і m. Тоді початкова швидкість супутника

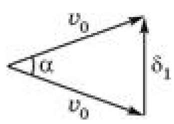
$$v_0 = \sqrt{G\frac{M}{r}}; \quad (1)$$

якщо ж збільшити цю швидкість у $\sqrt{2}$ раза, то супутник подолає тяжіння Землі та віддалиться від неї на необмежену відстань.

Витрата пального під час кожного вмикання двигуну прямо пропорційна імпульсу, який отримує супутник, тобто модулю зміни швидкості δ.

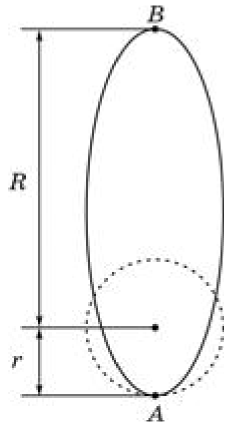
Можна запропонувати два способи зміни орбіти.

1) Треба увімкнути двигун один раз над полюсом, щоб «повернути» швидкість на кут α. На рисунку показано відповідний рівнобедрений трикутник (зазначено модулі швидкостей), з якого отримуємо $\delta_1 = 2v_0 \sin\frac{\alpha}{2}$.



2) Треба спочатку над одним полюсом (у точці A, див. рисунок) надати супутнику додаткової швидкості u, щоб перевести його на витягнуту еліптичну орбіту; тоді над іншим полюсом (у

точці B) швидкість v_1 супутника буде меншою і її легше буде «повернути» на кут α. Після половини оберту новою еліптичною траєкторією треба зменшити швидкість супутника знов-таки на u, щоб орбіта стала коловою. Таким чином, витрата пального буде пропорційна швидкості $\delta_2 = 2u + 2v_1 \sin\frac{\alpha}{2}$.

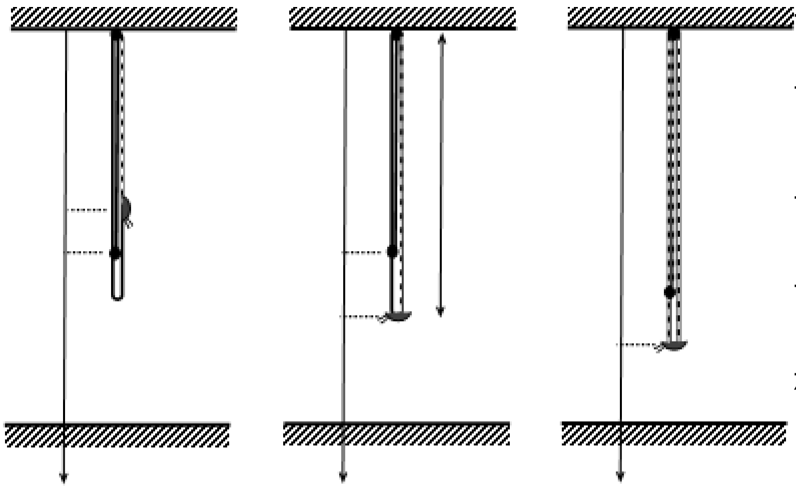


Якщо $u \to v_0(\sqrt{2}-1)$ (швидкість $v_0 + u$ — це аналог другої космічної швидкості для даної орбіти), другий доданок прямує до нуля (поворот площини орбіти відбуватиметься майже за нульової швидкості). Цей варіант вигідніший за варіант 1 за великих значень кута α. Проте час такого руху великий, формально він прямує до нескінченності…

Відповідь. 1) Слід увімкнути двигун один раз над полюсом, змінивши напрям швидкості на 5°. 2) Слід увімкнути двигун над полюсом, збільшивши швидкість супутника трохи менше ніж на 41 %, над іншим полюсом змінити напрям швидкості на 180° і ще через половину оберту зменшити швидкість до початкового значення.

<u>Задача 4</u>

Спочатку розтягуватиметься тільки одна нитка, точніше та її частина, яку подолає жук (див. рис.1). Довжина розтягнутої частини буде збільшуватись, а її жорсткість, відповідно, зменшуватись. Позначимо відстань від стелі до жука через *x* (координата жука), а довжину розтягнутої до *x* частини нитки, яку б та мала у не розтягнутому стані, через *y*. Тоді видовження робочої частини нитки буде $x - y$, а її коефіцієнт жорсткості $k = \frac{l}{y}k_0$, де k_0 – коефіцієнт жорсткості однієї нитки довжиною l. З умови рівноваги маємо $k(x-y) = mg$, звідки знаходимо $x = \left(1 + \frac{mg}{k_0 l}\right)y = 2y$ (можна було записати відразу за умовою задачі).



Такий етап руху продовжуватиметься до тих пір, поки $x \le 2l - y$. У момент $x = 2l - y$ неробоча частина розтягнутої нитки вирівняється з паралельно з'єднаними другою і третьою нитками (рис.2), після чого вони також почнуть розтягуватися, а жук продовжуватиме перебирати лапами, перебуваючи у найнижчій точці гумової «драбини» і опускаючись ще нижче (рис.3).

Отже, наприкінці першого етапу, перед початком розтягування другої і третьої ниток, координата жука знаходиться із системи рівнянь $\begin{cases} k(x_1 - y_1) = mg, \\ x_1 = 2l - y_1 \end{cases}$ і дорівнює:

$x_1 = 2y_1 = \frac{4}{3}l = 2$ м.

Під час другого етапу руху жука підтримує гума з двох сторін: розтягнута на $x - y$ частина першої гумової нитки, яку подолав жук (її довжина у не розтягнутому стані y) і послідовно з'єднані залишок першої нитки (довжина у не розтягнутому стані $l - y$, коефіцієнт жорсткості $\frac{l}{l-y}k_0$) і друга з третьою нитки (довжина у не розтягнутому стані l, коефіцієнт жорсткості $2k_0$). Загальне видовження системи ниток ліворуч від жука (рис.3) $x-(2l-y)$. Коефіцієнт жорсткості цієї системи (послідовне з'єднання) $k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k_0 l}{3l - 2y}$. Отже умова рівноваги жука набуває вигляду $k'(x-(2l-y)) + \frac{l}{y}k_0(x-y) = mg$, звідки знаходимо

$$x = \frac{2}{l}\left(\frac{5}{3}ly - y^2\right).$$

Оскільки на початку даного етапу руху жук спустився на 2 м, і йому ще не вистачало 0,5 м до підлоги, знайдемо максимальне значення x, для чого виділимо повний квадрат:

$$x = \frac{2}{l}\left(\frac{5}{3}ly - y^2\right) = \frac{2}{l}\left(\frac{25}{36}l^2 - \left(y - \frac{5}{6}l\right)^2\right).$$

Найбільше значення x приймає, коли віднімаємо найменше значення повного квадрату, тобто 0, що виконується при $y = \frac{5}{6}l$:

$$x_{\max} = \frac{25}{18}l \approx 208{,}3 \text{ см}.$$

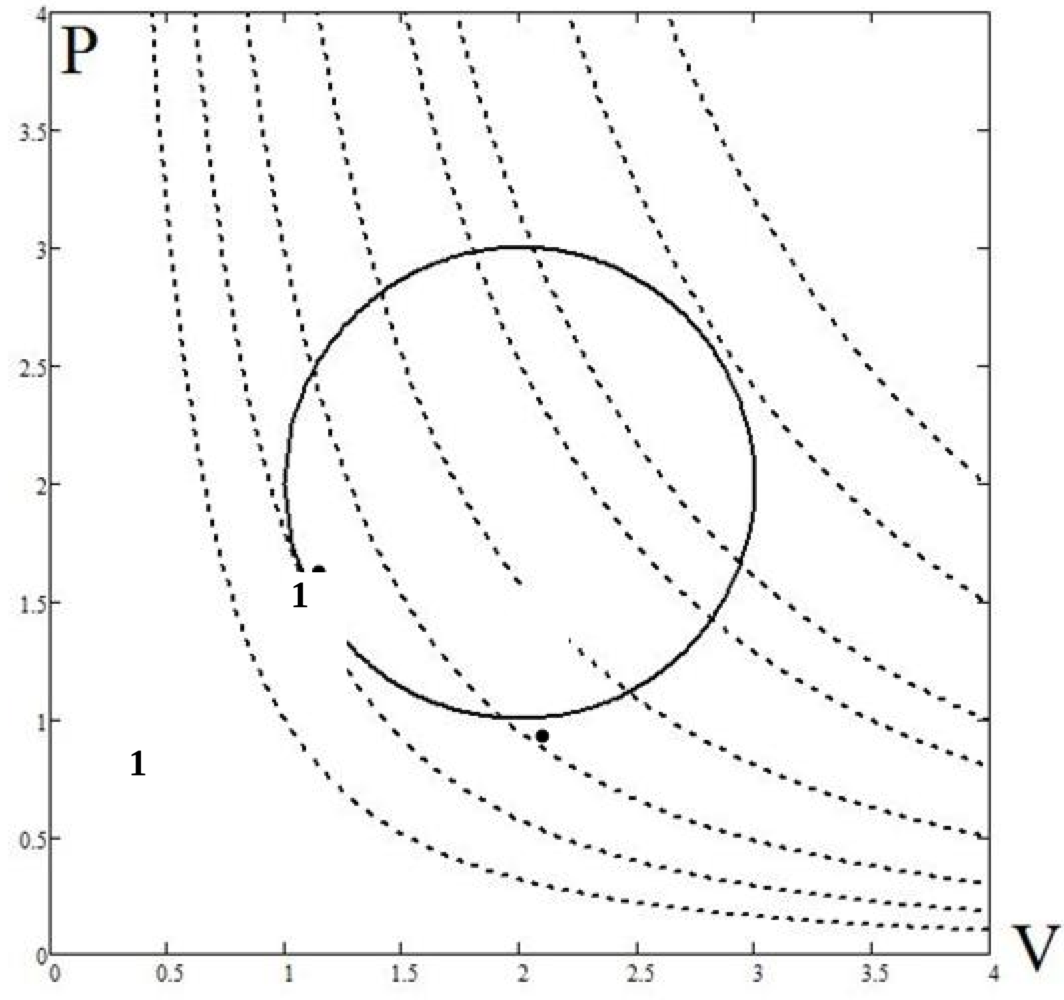
Як бачимо, жуку не вистачає майже 42 см до підлоги. Можна порекомендувати жуку зістрибнути, але це, мабуть, буде виглядати не дуже поважно. Якщо жук буде просуватися ниткою далі, він почне підніматися, і, коли досягне вузла, опиниться у точці, координата якої x_2 може бути легко знайдена, наприклад, з умови рівноваги $3k_0(x_2 - l) = mg$: $x_2 = \frac{4}{3}l = 2$ м. Отже, коли жук висить, схопившись за вузол, на трьох паралельних нитках, він розтягує їх на 0,5 м і ще 0,5 м залишається до підлоги. Згадаємо, що під час коливань пружинного маятника, його відхилення від положення рівноваги однакові. Виникає ідея динамічного розв’язку задачі. Жук спускається по одній нитці до вузла ($x = l$, $y = l/2$), після чого одними лапами хапається за вузол, а іншими відпускає розтягнуту нитку. Жук має ефектно опуститися на деяку відстань h, на якій на мить зупиниться, коли потенціальна енергія в полі тяжіння mgh повністю перейде у потенціальну енергію розтягнутих гумових ниток:

$mgh = 3\dfrac{k_0 h^2}{2}$. Звідки знаходимо $h = \dfrac{2}{3}\dfrac{mg}{k_0} = \dfrac{2}{3}l = 1\,\text{м}$ – рівно стільки, скільки недостає до підлоги. Отже в найнижчій точці траєкторії, біля самої підлоги, жук зісковзне на підлогу, маючи нульову відносно неї швидкість. Можливо це також завадить його поважності, але тепер падати з висоти вже не прийдеться.

Задача 5

6

При знаходженні ККД цього процесу необхідно визначити ділянки на яких теплота передається від нагрівача робочому тілу, а на яких віддається робочим тілом холодильнику. Ця задача може бути розв‘язана і аналітично з наперед заданою точністю, але це вимагає досить серйозних математичних розрахунків із застосуванням матаналізу, аналітичної геометрії і зводиться до розв‘язання трансцендентного рівняння. Тому для визначення ділянок на графіку проведено адіабати.



Масштаб осей на графіку не вказаний, тому одиничний відрізок на осі V будемо вважати рівним V_0, а на осі P – P_0.

З графіку видно, що теплота підводиться на ділянці 1234, а віддається на ділянці 4561.

Для знаходження ККД використаємо формулу:

$$\eta = \frac{A_\varepsilon}{Q_{1234}}$$

Корисна робота визначається з співвідношення: $A_к = \pi V_0 P_0$

$Q_{1234} = \Delta U_{1234} + A_{12} + A_{23} + A_{34}$

З графіку знаходимо:

$V_1 = 1,1V_0;\ P_1 = 1,6P_0;\ V_4 = 2,8V_0;\ P_4 = 2,6P_0;$

$$\Delta U_{1234} = \frac{3}{2}(P_4V_4 - P_1V_1) = 8{,}28P_0V_0$$

Роботи знаходимо з площ відповідних фігур з геометричних міркувань:

$$A_{12} = -((V_1 - V_2)P_2 - \frac{1}{4}P_0V_0(\alpha - \sin\alpha)),\ \text{ä}\mathring{a}\ \frac{1}{2}P_0V_0\sin a = 0{,}4P_0 \cdot 0{,}9V_0$$
$$A_{12} = -(0{,}1 \cdot 2P_0V_0 - 0{,}25P_0V_0 \cdot 0{,}21) \approx -0{,}15P_0V_0$$

$$A_{23} = (V_3 - V_2)P_2 + \frac{1}{2}\pi P_0V_0 = (2 + \frac{\pi}{2})P_0V_0 = 6{,}71P_0V_0$$

$$A_{34} = ((V_4 - V_3)P_4 + \frac{1}{4}P_0V_0(\alpha - \sin\alpha)),\ \text{ä}\mathring{a}\ \frac{1}{2}P_0V_0\sin a = 0{,}6P_0 \cdot 0{,}8V_0$$
$$A_{34} = (0{,}8 \cdot 2{,}6P_0V_0 + 0{,}25P_0V_0 \cdot 0{,}33) \approx 2{,}16P_0V_0$$

Остаточно для ККД маємо: $\eta = 18{,}5\%$