Задача 1. *Про цілі числа a, b, c відомо, що $a^2+2bc=1$ і $b^2+2ca=2012$. Знайдіть усі можливі значення виразу c^2+2ab.*

Розв'язання. Нехай a, b і c – такі цілі числа, що виконуються такі рівності:

$$a^2+2bc=1 \text{ і } b^2+2ca=2012.$$

Тоді різниця другої і першої рівності дають таку рівність:

$$(b-a)(b+a-2c)=2011.$$

Оскільки 2011 – просте число, то можливі такі чотири випадки:

$$1)\ \begin{cases} b-a=1, \\ b+a-2c=2011; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} b-a=-1, \\ b+a-2c=-2011; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} b-a=2011, \\ b+a-2c=1; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} b-a=-2011, \\ b+a-2c=-1. \end{cases}$$

Далі, виражаємо із кожної системи b та c через a і підставляємо одержані значення в рівність $a^2+2bc=1$. Одержимо відповідно такі чотири квадратні рівняння:

$$3a^2-2008a-2011=0, \qquad (1)$$

$$3a^2+2008a-2011=0, \qquad (2)$$

$$3a^2+6032a+2010\cdot 2011-1=0, \qquad (3)$$

$$3a^2-6032a+2010\cdot 2011-1=0. \qquad (4)$$

Рівняння (1) має лише один цілий корінь $a=-1$, а тому знаходимо, що відповідно $b=0$, $c=-1006$.

Рівняння (2) має лише один цілий корінь $a=1$, а тому знаходимо, що відповідно $b=0$, $c=1006$.

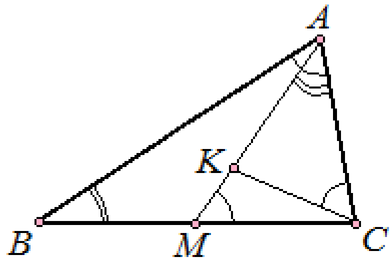
Рівняння (3) і (4) взагалі не мають дійсних коренів (їх дискримінанти – від'ємні).

В обох випадках $c^2+2ab=1006^2=1012036$.

Відповідь. $1006^2=1012036$.

Задача 2. *Про трикутник ABC відомо, що AM – його медіана, а $\angle AMC=\angle BAC$. На промені AM відмітили точку K таку, що $\angle ACK=\angle BAC$. Доведіть, що центри описаних кіл трикутників ABC, ABM і KCM лежать на одній прямій.*

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі.



Оскільки $\angle AMC = \angle BAC$, то $\angle ABC = \angle CAM$. З того, що $\angle KMC = \angle KCA$ і $\angle ABM = \angle MAC$ випливає, що AC – спільна дотична до описаних кіл трикутників ABM і CMK. За теоремою про дотичну і січну маємо:

$$AK \cdot AM = AC^2 = CM \cdot BC = BM \cdot BC,$$

тобто $AK \cdot AM = BM \cdot BC$. Ця рівність означає, що точки A і B рівновіддалені від центра O кола трикутника CMK. Дійсно, нехай R – радіус цього кола, тоді $AK \cdot AM = AO^2 - R^2$ і $BM \cdot BC = BO^2 - R^2$. Тому рівність $AK \cdot AM = BM \cdot BC$ еквівалентна рівності $AO^2 - R^2 = BO^2 - R^2$. Звідки $AO = BO$. Отже, центр O цього кола рівновіддалений від точок A і B. Оскільки центри описаних кіл трикутників ABC і ABM також рівновіддалені від точок A і B, то усі три центри належать серединному перпендикуляру відрізка AB, тобто вони колінеарні.

Задача 3. *Нехай α, β, γ – числа із інтервалу $(0;\pi/2)$. Доведіть нерівність*

$$\frac{4\sin\alpha+3\sin\beta+2\sin\gamma}{2\sin\alpha+3\sin\beta+4\sin\gamma}+\frac{4\sin\beta+3\sin\gamma+2\sin\alpha}{2\sin\beta+3\sin\gamma+4\sin\alpha}+\frac{4\sin\gamma+3\sin\alpha+2\sin\beta}{2\sin\gamma+3\sin\alpha+4\sin\beta}\geq 3.$$

Розв'язання. Нехай $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = y$, $\sin\gamma = z$, тоді $x>0$, $y>0$, $z>0$ і нам треба довести нерівність

$$\frac{4x+3y+2z}{2x+3y+4z}+\frac{4y+3z+2x}{2y+3z+4x}+\frac{4z+3x+2y}{2z+3x+4y}\geq 3.$$

Ця нерівність рівносильна таким нерівностям:

$$\left(\frac{4x+3y+2z}{2x+3y+4z}+1\right)+\left(\frac{4y+3z+2x}{2y+3z+4x}+1\right)+\left(\frac{4z+3x+2y}{2z+3x+4y}+1\right)\geq 6,$$

$$\frac{6x+6y+6z}{2x+3y+4z}+\frac{6x+6y+6z}{2x+3y+4z}+\frac{6x+6y+6z}{2x+3y+4z}\geq 6,$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+3y+4z}+\frac{1}{2y+3z+4x}+\frac{1}{2z+3x+4y}\right)\geq 1,$$

$$\frac{1}{2x+3y+4z}+\frac{1}{2y+3z+4x}+\frac{1}{2z+3x+4y}\geq\frac{1}{x+y+z}.$$

Для доведення останньої нерівності скористаємося відомою нерівністю

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9,\ (*)$$

де a, b, c – додатні числа, яка легко доводиться за допомогою нерівності Коші для трьох додатних чисел. Покладемо $a=2x+3y+4z$, $b=2y+3z+4x$, $c=2z+3x+4y$, тоді $a+b+c=9(x+y+z)$. Тому, нерівність $(*)$ рівносильна таким нерівностям:

$$9(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+3y+4z}+\frac{1}{2y+3z+4x}+\frac{1}{2z+3x+4y}\right)\geq 9,$$

$$\frac{1}{2x+3y+4z}+\frac{1}{2y+3z+4x}+\frac{1}{2z+3x+4y}\geq\frac{1}{x+y+z},$$

що і треба було довести.

Задача 4. *Дві послідовності (x_n) і (y_n) дійсних чисел задаються наступним чином:*

$$x_1=y_1=\sqrt{3},\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

для всіх натуральних $n\geq 1$. Доведіть, що $[x_n y_n]=2$ для всіх натуральних $n>1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $x_n>0$ і $y_n>0$, для всіх $n\geq 1$. Нехай $z_n=\frac{1}{y_n}$ для всіх $n\geq 1$, тоді рекурентна формула для послідовності (y_n) перепишеться так:

$$\frac{1}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1}{z_n}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{z_n^2}}},$$

$$z_{n+1}=z_n+\sqrt{1+z_n^2}.$$

Оскільки $z_2=x_1=\sqrt{3}$, то члени послідовностей (x_n) і (z_n), маючи однакові рекурентні формули, задовольняють умові: $z_n=x_{n-1}$.

Таким чином,

$$x_n y_n = \frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Враховуючи, що послідовність (x_n) монотонно зростає ($x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2} > x_n$ для всіх $n \geq 1$), то $3x_{n-1}^2 > 3x_1^2 > 1$. Звідси випливає, що $4x_{n-1}^2 > 1 + x_{n-1}^2$, тобто $2x_{n-1}^2 > \sqrt{1+x_{n-1}^2}$, і $3x_{n-1} > x_{n-1} + \sqrt{1+x_{n-1}^2} = x_n$. Оскільки $\sqrt{1+x_{n-1}^2} > x_{n-1}$, то $x_n > 2x_{n-1}$.

Таким чином, $2 < x_n y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} < 3$, тобто $[x_n y_n] = 2$ для всіх $n > 1$.

Задача 5. *Знайдіть усі функції $f : R \to R$, які задовольняють рівність*

$$f\left(x + f(y) - 2012\right) = x + y$$

для будь-яких дійсних x та y.

Розв'язання. Припустимо, що така функція f існує. Покладемо в умову $x = 2012$ і $y = 1$, одержимо: $f\left(f(1)\right) = 2013$. Далі, покладемо в умову $x = t - 1$, де $t \in \mathbb{R}$, і $y = f(1)$, одержимо: $f(t) = t - 1 + f(1)$. Звідси випливає, що шукана функція може мати лише такий вигляд: $f(x) = x + a$ для усіх дійсних x і деякого дійсного a. Перевірка показує, що умові задачі задовольняє лише така функція: $f(x) = x + 1006$.

Відповідь. $f(x) = x + 1006$.