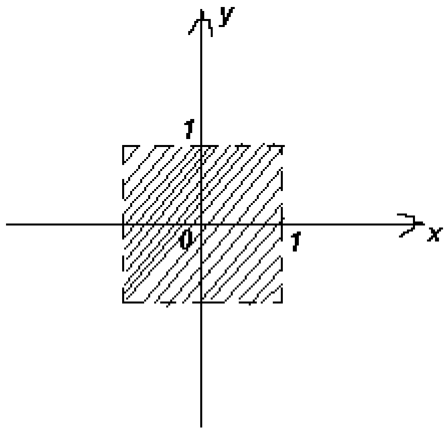
1. Вкажіть множину точок (x, y) координатної площини, які задовольняють нерівності

$$\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+\left(1-y^2\right)^2} \prec 2-x^2-y^2$$

Розв’язання. Нехай $a=1-x^2$; $b=1-y^2$, тоді дана нерівність набуде виду: $\sqrt{a^2+b^2} \prec a+b$. Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} a+b \succ 0, \\ a^2+b^2 \prec (a+b)^2, \end{cases}$ $\begin{cases} a+b \succ 0, \\ ab \succ 0, \end{cases}$

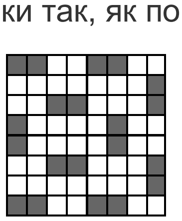
$\begin{cases} a \succ 0, \\ b \succ 0. \end{cases}$ Таким чином шукана множина точок задовольняє системі: $\begin{cases} 1-x^2 \succ 0, \\ 1-y^2 \succ 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} |x| \prec 1, \\ |y| \prec 1. \end{cases}$

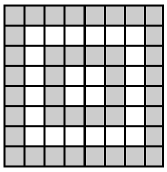


2. В кожній клітинці шахової дошки сидить по два таргани. В деякий момент часу кожний тарган переповзає на сусідню (по стороні) клітинку, причому, таргани, що сиділи на одній клітинці, переповзають в різні клітинки. Яка найбільша кількість клітинок дошки може після цього залишитись вільною?

Розв’язання. Зауважимо, що більше двадцяти чотирьох клітин вільними виявитися не можуть. Дійсно, закрасимо 20 клітин дошки так, як показано на рис.1



Кожна зафарбована клітина має наступну властивість: у які б дві сусідні клітини не переповзли з неї таргани, в ці клітини не зможуть потрапити таргани ні з якою іншою зафарбованої клітини. Тому, після переповзання всіх тарганів, принаймні 40 клітин дошки буде зайнято. Покажемо, що 24 клітини звільнити можна. Для цього всі таргани повинні перпеповзти в клітини, зафарбовані так, як на рис. 2. Оскільки кожна не зафарбована клітина межує рівно з двома зафарбованими, то це можливо.



Відповідь. 24 клітинки.

3 . Натуральні числа x та y такі, що $3x^2 + x = 8y^2 + 2y$. Довести, що $(4y + 2x + 1)$- квадрат натурального числа.

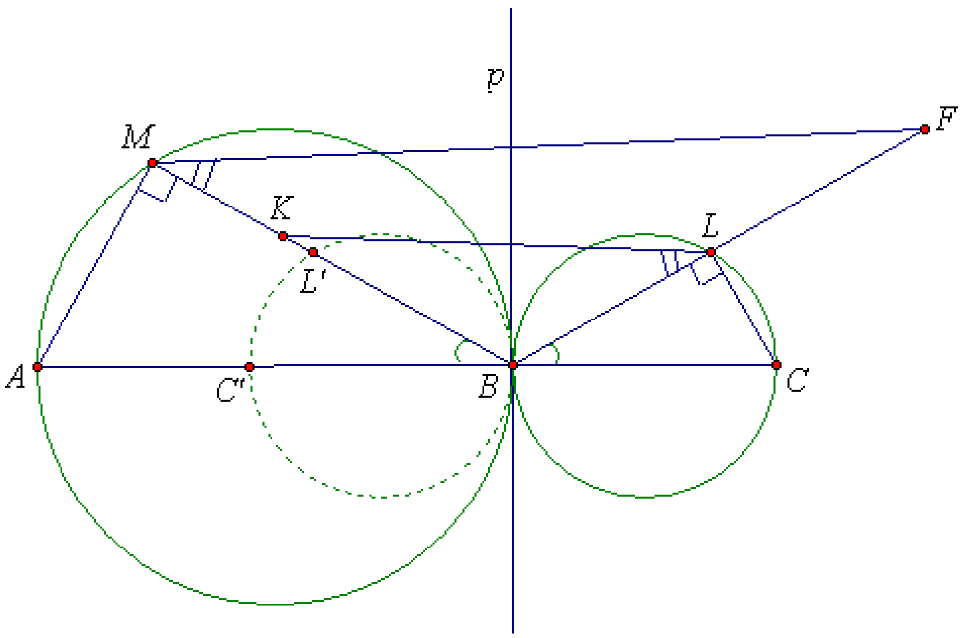
Розв'язання.

Подамо нашу рівність у вигляді $x^2 = 8y^2 + 2y - 2x^2 - x$, а потім

$x^2 = (2y - x)(4y + 2x + 1)$. Якщо вираз в перших дужках ділиться на просте **p,** то на нього ділиться x, а отже на нього ділиться і y. Це означає, що не ділиться вираз в других дужках. Множники взаємнопрості, а тому є точними квадратами.

4. Всередині відрізка АС вибрали довільну точку В і побудували кола з діаметрами АВ та ВС. На колах (в одній півплощині відносно АС) вибрали відповідно точки М і L так, що $\angle MBA = \angle LBC$. Точки К та F відмічені відповідно на променях ВМ та BL так, що $BK = BC$ і $BF = AB$. Доведіть, що точки М, К, F та L лежать на одному колі.

Розв'язання.



Так як кут АМВ вписаний в коло з діаметром АВ, то $\angle AMB = 90^\circ$ (див. рис.). Аналогічно, в колі з діаметром СВ, $\angle CLB = 90^\circ$. Тоді $\Delta ABM \infty \Delta CBL$ (за двома кутами). З цього слідує, що $\frac{BM}{BL} = \frac{AB}{CB} = \frac{BF}{BK}$. Отримуємо, що $\Delta BMF \infty \Delta BLK$, оскільки кут В у них спільний, а сторони, утворюючі цей кут,- пропорційні. Тобто, $\angle FMB = \angle KLB$, тобто $\angle FMK + \angle FLK = 180^\circ$. Отримана рівність рівносильна тому, що точки M,K,F та L лежать на одному колі.

Подібність трикутників BMF і BLK, з якої випливає твердження, яке необхідно довести, можна довести інакше. Розглянемо, наприклад, осьову симетрію відносно прямої p - спільної внутрішньої дотичної даних кіл. Позначивши C 'і L' образи точок C і L відповідно, отримаємо коло з діаметром BC ', симетричне до кол з діаметром BC. Так як кола з діаметрами BC 'і BA дотикаються внутрішнім чином в точці B, то вони гомотетичні. Отже, $\frac{BM}{BL} = \frac{BM}{BL'} = \frac{BA}{BC'} = \frac{BF}{BK}$.

5. Випуклий **n**-кутник діагоналями що не перетинаються розділено на трикутники так, що кожна вершина **n**-кутника є вершиною непарного числа трикутників. Доведіть, що **n** кратно трьом.

Розв’язання.

Доведемо, що можна пофарбувати трикутники в два кольори (чорний і білий) так, щоб будь-які два суміжні трикутники були різних кольорів, по індукції. Для чотирикутника це очевидно. Припустимо, що в будь-якому опуклому n-кутнику таке розфарбування можливе. Розглянемо многокутник з n + 1 стороною. В ньому є діагональ, що відтинає трикутник, дві сторони якого є сторонами многокутника. n-кутник що залишився задовольняє умовам задачі і його можна розфарбувати зазначеним чином. Фарбуємо трикутник, що залишився, в колір, протилежний кольору суміжного трикутника. При цьому розбитті кожна проведена діагональ многокутника є спільною стороною для якихось двох суміжних трикутників, тобто, одночасно є стороною трикутників різних кольорів. Так як кожна вершина многокутника є вершиною непарної кількості трикутників, то крайні трикутники з спільною вершиною пофарбовані в один колір. Тому всі трикутники, які мають з многокутником хоча б одну спільну сторону, пофарбовані в один колір (наприклад, білий). Тоді всі сторони многокутника - це сторони білих трикутників. Нехай a - кількість білих трикутників, b - кількість чорних трикутників. Тоді n = 3a - 3b, а, отже, ділиться на 3.