1. Розв'язати в натуральних числах рівняння: $a!+b!+c!=d!$.

Розв'язання. Не порушуючи загальності можна стверджувати, що $a \le b \le c$. Тоді з даного рівняння слідує, що $d > c$, а отже $d \ge c+1$, $d! \ge (c+1)! = (c+1)\cdot c! > 3c! \ge a!+b!+c!$ якщо $c+1>3$.

Отже, при $c+1>3$ рівняння коренів не має. Тому $c=1$ або $c=2$. Залишилось перевірити, що із можливих наборів $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,2,2)$ трійок (a,b,c) рівнянню задовольняє лише останній.

Відповідь. $a=b=c=2$, $d=3$.

2. Розглянемо всі можливі параболи $y=x^2+ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$, які перетинають осі координат в трьох різних точках. Для кожної такої параболи через ці точки провели коло. Довести, що всі ці кола мають спільну точку.

Розв'язання. Розглянемо довільну параболу $y=x^2+ax+b$, яка перетинає осі координат у трьох точках. Зрозуміло, що дві з них належать осі абсцис: $A_1(x_1;0)$, $A_2(x_2;0)$ (нехай $|x_1|\le|x_2|$), а одна – $B(0,b)$ – осі ординат. Нехай ω – коло, що проходить через ці три точки і нехай воно вдруге перетинає вісь ординат в точці $C(0,c)$ (якщо коло дотикається до осі ординат, то $c=b$).

Очевидно, що $b\ne 0$. Розглянемо два випадки: якщо $b>0$ і якщо $b<0$. Якщо $b>0$ (рис. 1), то OB є січною кола, як і OA_2. За властивістю січних, які проведено з точки O до кола ω, $OC\cdot OB=OA_1\cdot OA_2$. За теоремою Вієта $OA_1\cdot OA_2=b$. Тоді $OC\cdot b=b$, звідки $c=1$. Таким чином, в цьому випадку коло проходить через точку $(0;1)$.

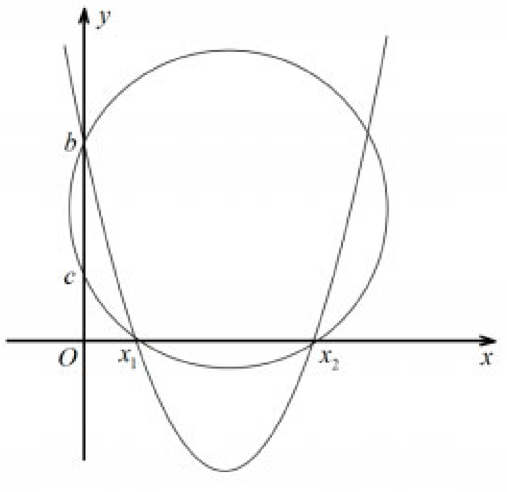


Рис. 1.

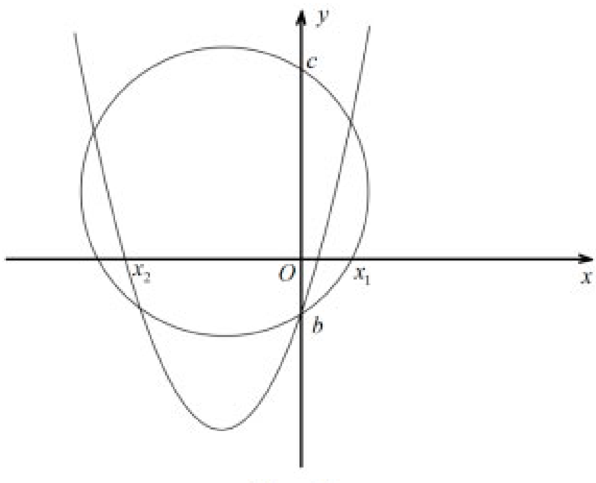
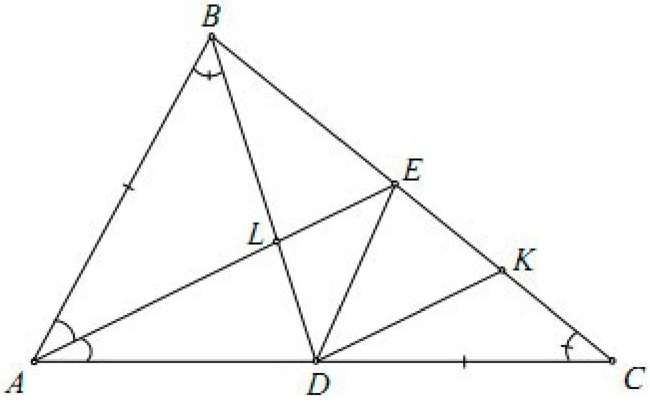


Рис. 2.

Якщо ж $b<0$ (рис. 2), то точка O лежить всередині кола ω, а саме коло ω вдруге перетинає вісь ординат в точці $C(0;c)$, де $c>0$. При цьому $OA_1\cdot OA_2=|b|=-b$. Згідно з властивістю хорд, що перетинаються, $OC\cdot OB=OA_1\cdot OA_2$, а тому $c\cdot(-b)=-b$ і знову $c=1$. Таким чином, усі кола проходять через точку $(0;1)$.

3. В трикутнику ABC точка D належить стороні AC, кути ABD і BCD рівні, AB = CD, AE – бісектриса трикутника ABC. Довести, що пряма ED паралельна прямій AB.

Розв'язання.



Проведемо DK паралельно AE (точка K належить стороні BC). Трикутники ABL і CDK рівні за стороною та двома прилеглими кутами ($AB = CD$, $\angle BAL = \angle EAC = \angle KDC$ и $\angle ABD = \angle KCD$). Тоді $AL = DK$, $\angle BLA = \angle DKC$. $LDKE$ – рівнобедрена трапеція ($\angle BLA = \angle DLE = \angle DKC = \angle LEK$). Трикутники ALD і EKD рівні за двома сторонами та кутом між ними ($AL = DK$, $LD = EK$, $\angle ALD = \angle EKD$). Тоді $AD = DE$, трикутник ADE – рівнобедрений. Отже, $\angle BAE = \angle EAD = \angle DEA$, з чого слідує, що пряма AB паралельна ED.

4. *Обчислити значення виразу*

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2012\cdot 2013+2013\cdot 2014}{1^2+3^2+5^2+...+2011^2+2013^2}.$$

Розв'язання. Перетворимо чисельник даного дробу, попередньо додавши до нього $0\cdot 1=0$, що не змінить його значення :

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...2010\cdot 2011+2011\cdot 2012+2012\cdot 2013+2013\cdot 2014=$$
$$=(0\cdot 1+1\cdot 2)+(2\cdot 3+3\cdot 4)+(4\cdot 5+5\cdot 6)+...+(2010\cdot 2011+2011\cdot 2012)+$$
$$+(2012\cdot 2013+2013\cdot 2014)=$$
$$=1(0+2)+3(2+4)+5(4+6)+...+2011(2010+2012)+2013(2012+2014)$$
$$=1\cdot 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 3+5\cdot 2\cdot 5+...+2011\cdot 2\cdot 2011+2013\cdot 2\cdot 2013=$$
$$=2\left(1^2+3^2+5^2+...+2011^2+2013^2\right).$$

Тепер знайдемо значення даного виразу, знаменник якого, очевидно, додатний:

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+2012\cdot 2013+2013\cdot 2014}{1^2+3^2+5^2+...+2011^2+2013^2}=\frac{2\left(1^2+3^2+5^2+...2011^2+2013^2\right)}{1^2+3^2+5^2+...2011^2+2013^2}=2.$$

5. Нехай дано множину, яка складається з 18 послідовних натуральних чисел. Доведіть, що неможливо здійснити розбиття цієї множини на дві такі підмножини A та B, що добуток всіх елементів множини A дорівнює добутку всіх елементів множини B. (Тут під розбиттям множини розуміється подання її у вигляді об'єднання двох підмножин, які не мають спільних елементів).

Доведення. Припустимо, що знайдеться така множина $S = \{n, n+1, n+2, ..., n+17\}$ із 18 послідовних натуральних чисел, яку можна розбити на дві множини A та B з рівними добутками елементів. По-перше, серед цих чисел не може бути чисел, що діляться на 19. Справді, якби таке число знайшлося, то воно було б єдиним, яке ділиться на 19 серед послідовних 18 чисел і тоді тільки в одному добутку був би множник 19. Отримали протиріччя. Отже, всі числа з множини S не діляться на 19. Розглянемо ці числа за модулем 19. Добутки в A і в B рівні, а значить конгруентні за модулем 19. Добуток усіх 18 чисел конгруентний за модулем 19 з числом 18!, яке в свою чергу за теоремою Вільсона конгруентне -1 за модулем 19. Але квадрати цілих чисел не можуть бути конгруентними з числом -1 за модулем 19, в чому легко переконатись, склавши таблицю остач при діленні на 19:

Остача при діленні на 19 числа k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Остача при діленні на 19 числа k^2	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

Одержана суперечність говорить про те, що наше припущення неправильне, а тому якою б не була множина з 18 послідовних натуральних чисел, її не можливо розбити на дві підмножини з рівними добутками.