1. Як буде видно далі, у вершинах гострих кутів розташовуються менш масивні зірки (m), а в вершинах тупих кутів — більш масивні (km). Позначимо α *половину* гострого кута ромба, a — сторону ромба, $q = Gm/a^3$. Тоді

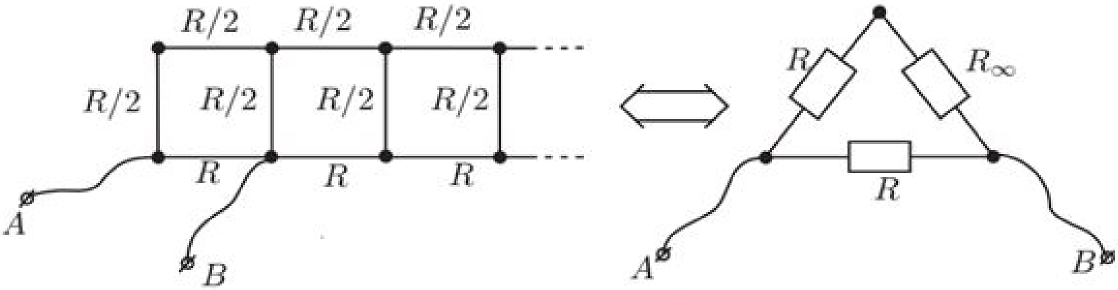
$$\omega^2\sin\alpha = \frac{qk}{4\sin^2\alpha} + 2q\sin\alpha,\ \omega^2\cos\alpha = \frac{q}{4\cos^2\alpha} + 2qk\cos\alpha.$$

Звідки $k = \mathrm{tg}^3\alpha\frac{1-8\cos^3\alpha}{1-8\sin^3\alpha}$ і $k-1 = \frac{\mathrm{tg}^3\alpha-1}{1-8\sin^3\alpha}$. Не важко переконатись, що α може бути в межах від 30 до 45° (на одній границі $k \to \infty$, на другій $k \to 1$). Тобто гострий кут ромба лежить в межах від 60 до 90°.

При α = 44° отримуємо k =1,059.

При α = 31° отримуємо k =9,42.

2. З симетрії схеми, зображеної на мал. 1, відносно лінії, що з'єднує точки A і B, слідує, що потенціали усіх точок, що симетричні відносно цій лінії рівні, тобто схеми на малюнках 1 і 2 еквівалентні. Розрахувати опір схеми на малюнкові уже легко:



$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2}\left(R_\infty + \frac{3R}{2}\right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

звідки $R_\infty = \frac{(\sqrt{21}-3)R}{4}$. Таким чином,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21}+1}{\sqrt{21}+5}R \approx 0{,}58R$$

3. З умови $v(x)=\sqrt{B^2-Ax}$ випливає рівняння для балансу енергії першого бруска у формі
$\frac{mv^2(x)}{2}=\frac{mB^2}{2}-\frac{mAx}{2}$.
Тоді величину B можна ототожнити зі швидкістю бруска в точці $x=0$ (вважатимемо надалі, що це момент часу $t=0$), а величину $F=mA/2$ – із силою сухого тертя, яка й гальмує брусок. Очевидно, його прискорення буде $a=-A/2$, закон зміни швидкості з часом – $v(t)=B-At/2$, закон зміни координати з часом – $x(t)=Bt-At^2/4$. Тоді безпосередньо перед зіткненням швидкість бруска буде $v(T)=B-AT/2$, а зіткнення відбудеться в точці $x(T)=BT-AT^2/4$.
Після непружного зіткнення з таким самим нерухомим бруском швидкість першого бруска зменшиться вдвічі: $V_0=v(T)/2$. Далі бруски рухатимуться разом. Маса системи зросте вдвічі, але сила тертя, що їх гальмує, також зросте вдвічі, отже, прискорення не зміниться. Таким чином, закон зміни швидкості в просторі можна записати як $V(\Delta x)=\sqrt{V_0^2-A\Delta x}$, де Δx – віддаль від точки зіткнення брусків.
Очевидно, бруски зупиняться в точці, де $V(\Delta x_0)=0$, звідки $\Delta x_0=V_0^2/A$, а віддаль від точки $x=0$ буде
$$L=x(T)+\Delta x_0=BT-AT^2/4+\frac{(B-AT/2)^2}{4A}=\frac{B^2}{4A}+\frac{3}{4}BT-\frac{3}{16}AT^2.$$

4. Поршень буде знаходитись у рівновазі, якщо тиск у пробірці дорівнюватиме $p_0+\rho_0 g(H-x)$ (*рис. 1*). Тоді за законом Бойля-Маріота:
$$[p_0+\rho_0 g(H-x)]xS=p_1LS$$
$$x^2-\left(H+\frac{p_0}{\rho_0 g}\right)x+\frac{p_1L}{\rho_0 g}=0$$
Звідки
$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(H+\frac{p_0}{\rho_0 g}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(H+\frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2-\frac{p_1L}{\rho_0 g}}$$
Визначимо, який з отриманих коренів задовольняє умов задачі. Для цього зобразимо залежність тику водню від *x* для газу всередині пробірки (за законом Бойля-Маріотта $pSx=const$, оскільки площа поперечного перерізу пробірки *S* стала, то $p=\frac{const}{x}$ - графіком є гіпербола) та тиску всередині рідини від *x* (тиск всередині рідини - це сума атмосферного та гідростатичного тиску: $p=p_0+\rho_0 g(H-x)$ - спадна пряма) (*рис. 2*).

Умові рівноваги поршня відповідають точки перетину графіків *a* та *b* (*рис. 2*). Положення поршня, якій відповідає точка *b* є нестійким: при незначному збільшенні об'єму газу тиск у рідині зменшується більше ніж тиск газу тому газ виштовхне поршень з пробірки; при незначному зменшенні об'єму газу сильніше збільшується тиск всередині рідини, над тиск газу, тому тиск рідини заштовхне поршень глибше у пробірку, доки поршень не займе положення, яке відповідає точці *a*.

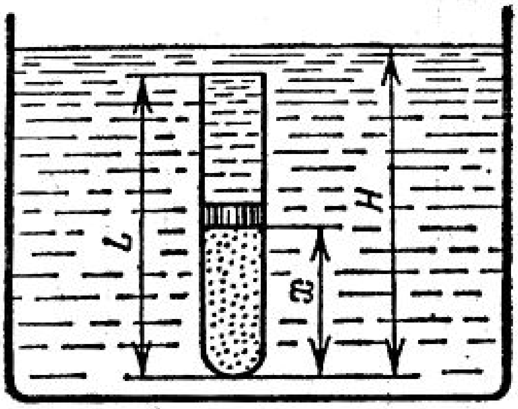


рис. 1

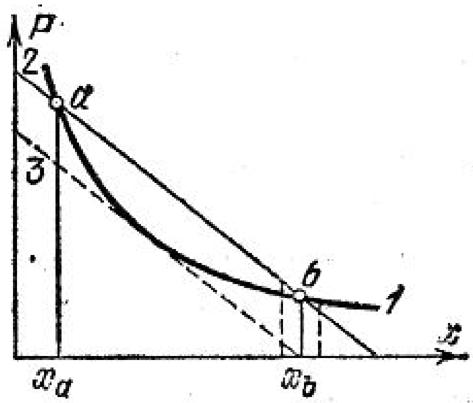


рис. 2

Точка a відповідає стійкій рівновазі поршня: при незначному збільшенні об’єму газу тиск всередині рідини зменшується менше ніж тиск газу, тому тиск рідини повертає поршень у положення рівноваги; при незначному зменшенні об’єму газу тиск газу зростає сильніше ніж тиск рідини, тому тиск газу повертатиме поршень у положення рівноваги. Отже, умові задачі задовольняє менший корінь

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}}$$

Визначимо, за якої умови ця задача взагалі має розв’язки:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g} \ge 0 \\ \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} \le L \end{cases}$$

$$\begin{cases} H \ge 2\sqrt{\frac{p_1 L}{\rho_0 g}} - \frac{p_0}{\rho_0 g} \\ \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} \le L \end{cases}$$

Умова $H = 2\sqrt{\frac{p_1 L}{\rho_0 g}} - \frac{p_0}{\rho_0 g}$ відповідає випадку, коли графіки мають одну точку дотику (пряма 3 на рисунку), в цьому випадку корінь не задовольнятиме умові задачі, оскільки рівновага поршня буде нестійкою. При $H < 2\sqrt{\frac{p_1 L}{\rho_0 g}} - \frac{p_0}{\rho_0 g}$ задача розв'язків не матиме. Також задача не матиме розв'язків, якщо не буде виконуватись умова

$$\frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} \le L$$

Опишемо процес занурення пробірки у ртуть для того випадку, коли обидва корені задовольняють умові:

$$\frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} \le L$$

$$\frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} < L$$

Перед зануренням пробірки водень у ній необхідно квазістаціонарно стиснути до значення x, який задовольняє умові:

$$\frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}} \le x < \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}}$$

Відповідь: $x_1 = \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_0}{\rho_0 g}\right)^2 - \frac{p_1 L}{\rho_0 g}}$