СТАРША ЛІГА (кожна задача по 3 бали)

1. Обозначим через ΔT разность температур воды в трубе и воздуха в помещении (эту последнюю температуру считаем всюду в пределах помещения одинаковой). Вода охлаждается только за счёт теплообмена с воздухом. Считая, как обычно, скорость этого теплообмена пропорциональной разности температур, получаем для температуры каждой «порции» воды: $\frac{d(\Delta T)}{dt} = -k \cdot \Delta T$, откуда $\Delta T_{fin} = \Delta T_{in} \exp(-kt)$. Тогда каждая «порция» воды помещению количество теплоты $Q = cm(T_{in} - T_{fin}) = cm\Delta T_{in}(1 - \exp(-kt))$. Очевидно, передаваемая тепловая мощность равна мощности тепловых потерь помещения при теплообмене с внешней средой. В нашем случае ΔT при прохождении воды по трубе уменьшается от 60 до 15 °C, т.е. $\Delta T_{fin} = \frac{1}{4}\Delta T_{in}$, т.е. $\exp(-kt) = 1/4$.

После увеличения скорости движения воды время охлаждения каждой «порции» воды уменьшится вдвое, поэтому множитель $\exp(-kt)$ надо заменить на $\exp(-kt/2) = \sqrt{\exp(-kt)} = 1/2$. Не забудем, что масса ежесекундно входящей воды удваивается. Мощность же тепловых потерь останется прежней. Таким образом, $\Delta T_{in}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2\Delta T_{in\ new}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$, откуда $\Delta T_{in\ new} = \frac{3}{4}\Delta T_{in} = 45$ °C. Начальная температура воды $T_{in\ new} = 45\ °C + 17\ °C = 62\ °C$.

2 (11 клас). Позначимо шукану напруженість, тобто напруженість сфери без видаленої частини E_1, а напруженість «кришечки» (видаленої частини сфери) E_2. Центр отвору знаходиться «під кришечкою», тобто на відстані від центра, трохи меншій радіуса. Зовні сфери

$E = E_1+E_2 = kq/R^2$

Всередині сфери

$E = E_1 - E_2 = 0$

Звідки отримуємо

$E_1 = kq/2R^2$

Такий самий результат можна отримати, якщо рахувати напруженість поля «кришечки» як нескінченної рівномірно зарядженої площини.

2 (10 клас). Імпульс води змінюються під дією тиску води в шлангу та шуканої сили взаємодії води з насадкою.

$p_1S_1 – F = \Delta(mv)/\Delta t$

Ми віднімаємо силу, оскільки позначили F силу, що діє з боку води на насадку, а з боку насадки на воду, відповідно, –F.

Зміна імпульсу пов'язана зі зміною швидкості води. Кінцева швидкість v, а початкову знайдемо з рівняння нерозривності струменя

$v_1 = vS_2/S_1$.

$\Delta(mv)/\Delta t = \Delta m/\Delta t * v(1-S_2/S_1) = \rho v^2S_2(1-S_2/S_1)$

Тиск в шлангу знайдемо з рівняння Бернуллі

$p_1 + \rho v_1^2/2 = \rho v^2/2$

$p_1 = \rho v^2(1-S_2^2/S_1^2)/2$

Остаточно маємо:

$F = \rho v^2S_1(1-S_2^2/S_1^2)/2 – \rho v^2S_2(1-S_2/S_1) = \rho v^2S_1(1-S_2/S_1)^2/2$.

Очевидно, що F>0, тобто результуюча сила діє на насадку у напрямку руху води.

3. Розрахуємо прискорення вільного падіння на поверхні астероїда.

$g_1 = GM/R^2 = 4\pi\rho GR^3/3R^2 = 4\pi\rho GR/3 \approx 1.4 \times 10^{-2}$ м/с^2

Початкова швидкість каменя

$v_0 = (2h/g)^{1/2} \approx 20$м/с

Спроба розрахувати рівноприскорений рух з прискоренням g_1та початковою швидкістю v_0 дає максимальну висоту польоту

$H = v_0^2/2g_1 \approx 1.4 \times 10^4$м

Але рівноприскореним рух можна вважати тільки за умови H<<R, що, очевидно не виконується.

Застосуємо закон збереження енергії

$mv_0^2/2 - GMm/R = -GMm/(R+H)$

$GM/(R+H) = GM/R - v_0^2/2$

Але з'ясовується, що вираз $GM/R - v_0^2/2 = 4\pi\rho GR^2/3 - v_0^2/2 \approx 140\text{-}200 = -60 < 0$

Це означає, що швидкість $v_0 = 20$м/с більше другої космічної для даного астероїда.

Таким чином, підкинутий камінчик ніколи не повернеться до астероїда, а відстань до нього буде необмежено збільшуватися.

4. Відповідно до умов задачі залежність швидкості від часу може бути подана у вигляді $v(t)=v_m\cos(\omega t)e^{-\delta t}$.

Тоді через півперіоду після попереднього удару, але перед наступним ударом швидкість маятника (за модулем) буде $v(T/2-\Delta t)= v_m e^{-\delta T/2}$, $T=2\pi/\omega$.

Для того, щоб коливання були строго періодичними, після удару вона повинна дорівнювати її початковому значенню: $v_m e^{-\delta T/2} + \Delta v= v_m$.

З останнього рівняння маємо: $v_m= \Delta v/(1- e^{-\delta T/2})$.

Покажемо, що коливання з такою амплітудою є стійкими.

Амплітуда сили в'язкого тертя пропорційна v_m. Максимальне відхилення також пропорційне v_m. Отже, робота сили тертя, що визначає втрати енергії коливань за період, буде пропорційна до v_m^2. З іншого боку, енергія, яка надається маятнику за період, буде

$$2[m\, v_m^2/2-m\, (v_m- \Delta v)^2/2]\approx 2m\, v_m\Delta v,$$

і вона лінійно залежить від v_m. Таким чином, при малих амплітудах коливань переважає надходження енергії в систему, і коливання зростатимуть. При великих амплітудах, навпаки, переважатимуть втрати енергії, і коливання спадатимуть. Отже, знайдене значення усталеної амплітуди коливань є стійким.

5. Очевидно, из системы выливается вода объёмом $Sl/4$ (из левой вертикальной трубки). Это означает, что угол наклона «горизонтали» в движущейся неинерциальной системе отсчёта определяется условием $\mathrm{tg}\,\alpha= 1/4$, а ускорение системы равно четверти ускорения свободного падения. Формула $p = \rho gh$ в данном случае превращается в выражение $p = \rho gl - \rho\cdot(g/4)\cdot 2l = \rho gl/2$. Остаётся лишь добавить атмосферное давление.