Розв'язок задачі Турист-3D

Розглянемо рух даних тіл, поки ще жодне з них не вдарялося о поверхню:

$$\begin{array}{lll} x_{(1)}(t) = x_1 + v_{x1} \cdot t, & y_{(1)}(t) = y_1 + v_{y1} \cdot t, & z_{(1)}(t) = v_{z1} \cdot t + \frac{gt^2}{2}, \\ x_{(2)}(t) = x_2 + v_{x2} \cdot t, & y_{(2)}(t) = y_2 + v_{y2} \cdot t, & z_{(2)}(t) = v_{z2} \cdot t + \frac{gt^2}{2}. \end{array} \quad (1)$$

Тоді відстань між тілами може бути обчислена як

$$d(t) = \sqrt{(x_1 + v_{x1}{\cdot}t - x_2 - v_{x2}{\cdot}t)^2 + (y_1 + v_{y1}{\cdot}t - y_2 - v_{y2}{\cdot}t)^2 + \left(v_{z1}{\cdot}t - \frac{gt^2}{2} - v_{z2}{\cdot}t + \frac{gt^2}{2}\right)^2}. \quad (2)$$

Завдяки взамознищенню фрагментів $\frac{gt^2}{2}$, підкореневий вираз є *квадратним тричленом* відносно t (з коефіцієнтами, залежними лише від параметрів x_1, y_1, x_2, y_2, v_{x1}, v_{y1}, v_{x2}, v_{y2}). Мінімум кореня є коренем з мінімума підкореневого виразу, а пошук мінімума квадратного тричлена на проміжку — більш-менш стандартна задача (огляд двох способів її вирішення дамо пізніше).

Само собою, що формули (1) справедливі *лише до першого з ударів* о поверхню. Пропонується просто розглянути *кожен* з проміжків, коли обидва тіла перебувають у вільному польоті (для кожного з цих проміжків утворюється свій варіант формули, аналогічної (2)), і вибрати мінімум серед усіх таких мінімумів.

В умовах абсолютно пружних ударів та однорідного гравітаційного поля рух тіл може тривати нескінченно, а у програмі можна перебрати лише скінченну кількість таких проміжків вільного польоту. З'ясуємо, чому насправді це не є проблемою. Розглянемо проекції швидкостей на горизонтальну площину. Модуль горизонтальної проекції відносної швидкості завжди сталий. Випадок, коли ця горизонтальна проекція нульова (бо $(v_{x1}{=}v_{x2})$ and $(v_{y1}{=}v_{y2})$) розглядається як (*единий!*) виключний, і для нього відповіддю є відстань між тілами у початковий момент (Δx та Δy сталі, а Δz у початковий момент нульова). В усіх інших випадках цей модуль горизонтальної проекції відносної швидкості не менший 1 (бо вхідні дані цілочисельні й ми відкинули випадок нуля). Завдяки не дуже великому діапазону початкових координат (до 1000 за модулем), можна стверджувати, що навіть якщо тіла спочатку наближаються, ніяк не пізніше, ніж через 4000 с, вони все одно гарантовано вони будуть далі одне від одного, ніж у початковий момент. А у 4000 с (розглядуваної задачі, а не часу роботи програми) поміститься ніяк не більше, ніж 20 тис. власне проміжків вільного польоту (що для комп'ютера зовсім не багато).

В принципі можна саме конкретне число «20 тис. проміжків» і використати у програмі; можна і якось інакше. Зокрема, більш-менш красивою здається така умова: обривати цикл розгляду проміжків вільного польоту тоді, коли модуль проекції відстані у горизонтальній площині став строго більшим, ніж вже відома мінімальна за всі розглянуті проміжки «справжня» тривимірна відстань.

Як все-таки шукати мінімум квадратного тричлена на проміжку

Аналітичний пошук розв'язання квадратного рівняння У формулі (2) можна перейти до «чистого» вигляду $a \cdot t^2 + b \cdot t + c$, де a, b та c якимсь чином виражаються через x_1, y_1, x_2, y_2, v_{x1}, v_{y1}, v_{x2}, v_{y2}.

Мабуть, легше зробити це перетворення олівцем на папері, хоча можна й у програмі. Переконавшися, що коефіцієнт при t^2 додатній, лишається тільки знайти t-координату вершини параболи $(d(t))^2$ і подивитися, чи потрапляє цей момент часу в той проміжок, який власне відповідає поточному проміжку вільного польоту (мінімум параболи вітками догори *на проміжку* — значення $a \cdot t_0^2 + b \cdot t_0 + c$ у вершині $t_0 = -\frac{b}{2a}$, але якщо вершина за межами проміжку, то значення на початку чи кінці проміжку).

Спосіб цілком правильний, найефективніший за часом (обчислення згідно прямих аналітичних формул). Але все ж аналітичні перетворення (хоч на папері, хоч у програмі) дещо громіздкі, в них можна помили́тися, ну і треба акуратно розібратися з випадком, коли вершина параболи за межами потрібного проміжку часу. Тому заради зменшення кількості випадків, більшої однотипності та з інших подібних міркувань може бути доцільним також і розглянутий далі тернарний пошук.

Тернарний пошук Тернарний пошук — стандартний метод пошуку мінімума функції на проміжку, застосовний не лише до квадратних тричленів, а й до значно ширшого класу т. зв. унімодальних функцій.

Детальніше про тернарний пошук можна прочитати у літературі. Зокрема, суть методу правильно викладена у англомовному (`en.wikipedia.org/wiki/Ternary_search`) розділі Вікіпедії; російськомовнома версія (`ru.wikipedia.org/wiki/Троичный поиск`) теж містить правильну суть, але занадто коротко. Щоправда, наведені там фрагменти коду виходять із припущення, що функція унімодальна з максимумом на проміжку, а тут і зараз нам треба мінімум на проміжку; отже, деякі зі знаків треба змінити на протилежні.

Розв'язок задачі Квадратне рівняння

В умові спеціально наведений 2-й тест, щоб показати, що обчислення за стандартними формулами $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ не завжди забезпечують потрібну точність (хоча, звісно, такий розв'язок якусь частину тестів проходить і якусь частину балів набирає).

Проблема виникає тоді, коли $|b| \approx \sqrt{b^2-4ac}$: віднімання (при від'ємному b, тобто додатньому $(-b)$) або додавання (при додатному b) призводить до катастрофічного зростання відносної похибки. Все одно, що взнавати масу пушинки наступним чином: зважитися на вагах самому; потім взяти у руку пушинку і зважитися на тих самих вагах разом із пушинкою в руці; відняти результат першого вимірювання з результату дру́гого. *Якби* вимірювання проводилися абсолютно точно, результат був *би* правильним; але насправді так не виходить, бо абсолютна похибка «кілька грамів», дуже дрібна й цілком допустима при вимірюванні маси людини, абсолютно недопустима при вимірюванні маси пушинки.

Як вже було зазначено, при додатньому b проблема виникає лише при додаванні, а при від'ємному b — лише при відніманні. Тобто, *один з* коренів «добрий» і може бути обчислений за відповідним варіантом формули (або $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, або $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$). Тоді інший може бути обчислений за теоремою Вієта, як $x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}$.

Наведений спосіб насправді теж не дає абсолютної точності — хоча б тому, що втрата точності при відніманні близьких чисел можлива і при обчисленнні $b^2 - 4ac$. Але він все ж дозволяє отримати обидві відповіді з відносно непоганими *відносними* похибками. Зокрема, вплив похибки при обчисленні $b^2 - 4ac$ у значній мірі нівелюється тим, що цей вплив проявляється, коли $\sqrt{b^2-4ac} \ll b$, і велика відносна похибка дрібної величини $\sqrt{b^2-4ac}$ мало впливає на похибку суми/різниці $\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right)$.

А дуже слабка вимога до точності «1%» введена не тому, що так уже важко добитися, наприклад, відносної похибки «10^{-6}», а щоб водночас і заплутати, і надати можливість написати якісь зовсім альтернативні розв'язки з використанням чисельних методів.

Розпил являє собою опуклий багатокутник у площині, визначеної трьома вхідними точками. Вершинами того багатокутника є перетин ребер куба з даною площиною.

Відповідно, досить побудувати набір всіх перетинів ребер куба з площиною, що задається трьома вихідними точками, і знайти площу опуклого багатокутника, що задається цим набором точок.

Для знаходження площі досить знайти порядок обходу багатокутника (наприклад відсортувавши точки по куту щодо деякої точки, гарантовано знаходиться всередині багатокутника; або побудувавши опуклу оболонку), після чого знайти площу стандартної формулою.

Визначення перетину ребра з площиною може потребувати деякої акуратності. Зручним виявляється вважати, що ребро перетинає площину, якщо одна з його вершин при підстановці в ліву частину рівняння площини дає від'ємне значення, а інша - невід'ємне.