1. Для яких натуральних k, які не перевищують 2015, прямокутник $k \times 2016$ можна розрізати на прямокутники 1×2015 і трьохклітинкові «куточки» так, щоб були наявними фігурки обох видів?

Відповідь. Лише для $k = 2015$.

Розв'язання. Доведемо, що для $k < 2015$ потрібне розрізання неможливе. Припустимо, що можливе. Вважатимемо, що заданий прямокутник розташовано так, що його довша сторона є горизонтальною. Очевидно, що кожний із прямокутників 1×2015 торкається однієї із коротких сторін прямокутника $k \times 2016$, а від другої сторони віддалений на одну клітинку. Ця непокрита прямокутником клітинка повинна бути покрита куточком, оскільки $k < 2015$. Назвемо прямокутник 1×2015 *чорним* (відповідно *білим*), якщо ця остання непокрита прямокутником клітинка рядочка, в якому він розташований, покрита куточком так, що дві інші клітинки цього куточка знаходяться вище (відповідно, нижче) цього прямокутника.

Розглянемо «найнижчий» із прямокутників 1×2015. Він повинен бути чорним, оскільки в іншому випадку нижче нього розташовується прямокутник $2016 \times k$, кількість клітинок якого ділиться на 3 і який повинен бути повністю закладений трьохклітинковими куточками та однією «доміношкою» із двох клітинок, що неможливо. З тієї ж причини «найвищий» із прямокутників 1×2015 повинен бути білим. Але тоді серед прямокутників 1×2015 знайдуться чорний та білий (причому білий лежить вище цього чорного), між якими немає інших таких прямокутників. Внутрішній між ними прямокутник має розміри $l \times 2016$ (загальна кількість клітин кратна 3). Він повинен бути повністю закладений трьохклітинковими куточками та двома «доміношками», що неможливо.

Доведемо, що для $k = 2015$ розрізання можливе, навівши приклад. Відріжемо від прямокутника 2015×2016 прямокутник 2015×6 і розріжемо його на «куточки» (та частина, що залишається розрізається на прямокутники 1×2015). Легко зрозуміти, що для цього достатньо розрізати його на прямокутники 2×3, оскільки вони розрізаються на «куточки» в очевидний спосіб. Для цього відріжемо прямокутник 2×6 (який розрізається на потрібні прямокутники), а прямокутник, що залишився, має розміри 2013×6 і теж розрізається на потрібні прямокутники, оскільки $2013 \vdots 3$, $6 \vdots 2$.

2. Дано рівносторонній трикутник ABC. На продовженні сторони AB за точку A вибрано точку D, на продовженні сторони BC за точку C — точку E, на продовженні сторони AC за точку C — точку F так, що $CF = AD$ і $AC + EF = DE$. Знайти градусну міру кута BDE.

Відповідь. 60°.

Розв'язання. Добудуємо трикутник ACE до паралелограма $ACEG$. Оскільки $CF = AD$, $CE = AG$ і $\angle FCE = \angle DAG = 60^\circ$, то трикутники DAG і FCE рівні. Тоді $GD = EF$. З цього слідує, що $DE = AC + EF = GE + GD$. Отже, точка G належить відрізку DE, а тому $DE \parallel AC$, звідки $\angle BDE = \angle BAC = 60^\circ$.

3. Добре відомо, що $3^2+4^2=5^2$. Менш відомо, що $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. А чи для довільного натурального k існує $2k+1$ послідовних натуральних чисел таких, що сума квадратів перших $k+1$ із них дорівнює сумі квадратів останніх k?

Відповідь. Так, для довільного.

Розв'язання. Спробуємо для кожного k знайти такий набір чисел. Позначимо середнє із них через a, тоді отримаємо, що це числа $a-k, \dots, a+k$. За умовою

$$(a-k)^2+\ldots+(a-1)^2+a^2=(a+1)^2+\ldots+(a+k)^2.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо коефіцієнти при рівних степенях a:

$$(k+1)a^2-2(k+(k-1)+\ldots+2+1)a+(k^2+(k-1)^2+\ldots+1^2)= \\ =ka^2+2(k+(k-1)+\ldots+2+1)a+(k^2+(k-1)^2+\ldots+1^2).$$

Перенесемо всі доданки в ліву частину:

$$a^2-4(k+(k-1)+\ldots+2+1)a=0.$$

З цього слідує, що $a=0$ або $a=4(k+(k-1)+\ldots+2+1)$. Другу із цих формул можна спростити. Якщо знайти суму арифметичної прогресії, то отримаємо $a=2k(k+1)$. При $a=0$ деякі із чисел набору будуть від'ємними, а отже, не задовольняють умову задачі. В другому випадку всі числа набору додатні, оскільки $2k(k+1)>k$. Таким чином, побудовано набір натуральних чисел, при якому виконується необхідна рівність.

4. Про попарно різні дійсні числа x, y, z відомо, що

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=t.$$

Знайти усі можливі значення, яких може набувати t.

Відповідь. 1 та -1.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$z=t-\frac{1}{x}=\frac{tx-1}{x},$$
$$y=t-\frac{1}{z}=t-\frac{x}{tx-1}=\frac{t^2x-t-x}{tx-1}.$$

Тоді

$$x+\frac{1}{y}=x+\frac{tx-1}{t^2x-t-x}=t,$$

звідки за допомогою рівносильних перетворень приходимо до рівності

$$(t^2-1)(x^2-tx+1)=0.$$

Таким чином, або $t=1$, або $t=-1$, або $x^2-tx+1=0$. Останній випадок неможливий, оскільки тоді $x=y$, що суперечить умові задачі.

Залишається довести, що для $t=1$ та $t=-1$ такі набори чисел існують. Справді, якщо, наприклад, $x=2$, $y=-1$, $z=\frac{1}{2}$, то $t=1$. При $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=-2$ одержуємо $t=-1$.

5. В школі 30 гуртків, в кожному з яких займається 40 дітей. Для кожного $i = 1, 2, \ldots, 30$ позначимо через n_i кількість дітей, які займаються рівно в i гуртках. Доведіть, що цій школі можна організувати 40 гуртків з 30 дітьми в кожному так, щоб числа n_i $(1 \leqslant i \leqslant 30)$ для цих нових гуртків залишилися б тими ж самими.

Розв'язання. Випишемо в рядок членів першого гуртка, за ними — другого, потім — третього і т. д. При цьому, якщо дитина є учасником і k-го гуртка, і $(k+1)$-го гуртка, то його в списку $(k+1)$-го гуртка запишемо під тим самим номером, що і в списку k-го гуртка. Порізавши отриманий довгий список на «шматочки» по 30 учнів у кожному, отримаємо 40 нових гуртків, які задовольняють умову задачі. Справді, при цьому ніхто не попаде в один гурток двічі, оскільки відстань між двома входженнями в довгий список однієї і тієї ж дитини за побудовою не менша 40, а отже, і не менша 30. Крім цього, кількість дітей, які відвідують рівно i гуртків, вочевидь, залишається тією ж.