XXIV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір чемпіонів»

МАТЕМАТИКА

Юніорська ліга

1. В рядок записано 101 цифру: нулі та одиниці. Для кожної некрайньої цифри a обирається цифра, яка хоча б двічі зустрічається серед a та її сусідів зліва та справа, і ця цифра записується під a. З отриманим рядком (який вже складається із 99 цифр) виконується аналогічна операція, з новим рядком – знову така ж дія, і т.д., доки не залишиться одна цифра. Виявилось, що ця цифра — 1. При якій найменшій кількості одиниць в початковому рядку це могло статися?

2. В опуклому шестикутнику $ABCDEF$ кути при вершинах B, C, E і F рівні, а прямі BC та EF паралельні. Довести, що $AB + AF = CD + DE$.

3. Нехай n – натуральне і a_1, a_2,..., a_{2n+1} – набір цілих чисел. Доведіть, що існує така перестановка b_1, b_2,…, b_{2n+1} цих чисел, що число $(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)...(b_{2n-1} - b_{2n})$ кратне $2^n \cdot n!$.

4. На столі розташовано три стопки дисків. В кожній стопці внизу лежать 11 чорних дисків, потім 10 білих, потім 9 чорних, 8 білих, …, 1 чорний. Оленка та Петро грають у таку гру. Вони по черзі беруть диски зі стопок, причому за один хід необхідно взяти зверху з довільної стопки кілька однокольорових дисків. Починає Оленка. Програє той, хто взяв останній диск. Хто з гравців може гарантовано перемогти незалежно від того, як грає суперник?

5. Дійсні числа a, b і c належать відрізку [–2;2]. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\left|a^2 - bc + 1\right| + \left|b^2 - ca + 1\right| + \left|c^2 - ab + 1\right|$?

XXIV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір чемпіонів»

МАТЕМАТИКА. Розв'язання задач
Юніорська ліга

Задача 1. В рядок записано 101 цифру: нулі та одиниці. Для кожної некрайньої цифри a обирається цифра, яка хоча б двічі зустрічається серед a та її сусідів зліва та справа, і ця цифра записується під a. З отриманим рядком (який вже складається із 99 цифр) виконується аналогічна операція, з новим рядком – знову така ж дія, і т.д., доки не залишиться одна цифра. Виявилось, що ця цифра — 1. При якій найменшій кількості одиниць в початковому рядку це могло статися?

Розв'язання. Зрозуміло, що одна одиниця «загине» після першого ж ходу, незалежно від її розташування в рядку.

Доведемо, що для двох одиниць умова задачі може виконуватись. Нехай вони розташовані на 50-му та 51-му місцях, а на решті місць – нулі. Тоді після кожного ходу ланцюжок нулів з обох сторін буде скорочуватися на один нуль, а одиниці в центрі будуть зберігатися. Після 49-го ходу нулі справа зникнуть, а зліва залишиться один нуль, а після 50-го ходу залишиться одна одиниця.

Відповідь. 2.

Задача 2. В опуклому шестикутнику $ABCDEF$ кути при вершинах B, C, E і F рівні, а прямі BC та EF паралельні. Довести, що $AB + AF = CD + DE$.

Розв'язання. Позначимо величини рівних кутів при вершинах B, C, E і F через α. Нехай прямі BC та DE перетинаються в точці G, а прямі AB і EF — в точці H. Тоді $\angle EGB = 180°-\angle FED = 180°-\angle ABC$, звідки $AB \parallel DE$. Отже, $BHEG$ — паралелограм, а тоді $\angle BHE = 180°-\alpha = \angle AFH$. Таким чином, трикутник FAH — рівнобедрений, а це означає, що $BH = BA+AH = BA+AF$. Аналогічно, $EG = DE+CD$. Залишилося зазначити, що відрізки BH та GE рівні як протилежні сторони паралелограма.

Задача 3. Нехай n – натуральне і a_1, a_2,..., a_{2n+1} – набір цілих чисел. Доведіть, що існує така перестановка b_1, b_2,…, b_{2n+1} цих чисел, що число $(b_1-b_2)(b_3-b_4)...(b_{2n-1}-b_{2n})$ кратне $2^n \cdot n!$.

Розв'язання. Серед чисел a_1, a_2,…, a_{2n+1} знайдуться два, які дають однакові остачі при діленні на $2n$. Нехай це будуть числа b_1 і b_2. Серед тих чисел, що залишились (їх $2n-1$), знайдуться два, які дають однакові остачі при діленні на $2n-2$. Нехай це будуть b_3 і b_4. Продовжуючи побудову аналогічним чином, отримаємо перестановку b_1, b_2, ..., b_{2n+1} таку, що числа b_{2k-1} та b_{2k} дають однакові остачі при діленні на $2(n-k+1)$ при всіх k від 1 до n. Така перестановка задовольняє умові задачі, оскільки $b_{2k-1}-b_{2k}$ кратне $2(n–k+1)$, а тому $(b_1-b_2)(b_3-b_4)...(b_{2n-1}-b_{2n})$ кратне $2n\cdot 2(n-1)\cdot ...\cdot 2=2^n\cdot n!$.

Задача 4. На столі розташовано три стопки дисків. В кожній стопці внизу лежать 11 чорних дисків, потім 10 білих, потім 9 чорних, 8 білих, …, 1 чорний. Оленка та Петро грають у таку гру. Вони по черзі беруть диски зі стопок, причому за один хід необхідно взяти зверху з довільної стопки кілька однокольорових дисків. Починає Оленка. Програє той, хто взяв останній диск. Хто з гравців може гарантовано перемогти незалежно від того, як грає суперник?

Розв'язання. Нехай другий гравець на кожний хід першого відповідає так: він бере із тієї ж стопки всі диски того ж кольору, що і верхній диск, окрім одного. Виключення складає випадок, коли після ходу першого гравця у відповідній стопці залишились диски тільки одного кольору, і ця стопка — не остання. В цьому випадку другий гравець забирає всі диски, що залишилися в цій стопці. При такій грі другого гравця перший кожного разу буде вимушений брати один диск, відкриваючи другому (якщо це був не останній диск на столі) декілька дисків одного кольору, і другий зможе продовжувати здійснювати свою стратегію. Зрозуміло, що, граючи так, другий гравець не програє. Отже, програє перший.

Відповідь. Петро (другий гравець).

Задача 5. Дійсні числа a, b і c належать відрізку [–2;2]. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\left|a^2-bc+1\right|+\left|b^2-ca+1\right|+\left|c^2-ab+1\right|$?

Розв'язання. Якщо $a, b, c \ge 0$, то зміна знаку одного із чисел не зменшує два доданки, в яких немає квадрату цього числа, і не змінює доданок, де цей квадрат є. Крім цього, при одночасній зміні знаків всіх трьох чисел усі три доданки не змінюються. Отже, можна, не порушуючи загальності, вважати, що два числа (наприклад, a і b) невід'ємні, а третє — недодатне.

Покладемо $d=-c$. Отримуємо $0\le a, b, d\le 2$, і сума, задана в умові, дорівнює

$$\left|a^2+bd+1\right|+\left|b^2+ad+1\right|+\left|d^2-ab+1\right|=a^2+bd+b^2+ad+2+\left|d^2-ab+1\right|.$$

В залежності від знаку виразу $d^2–ab+1$ ця сума може дорівнювати $a^2+b^2+d^2+bd+ad-ab+3$ або $a^2+b^2-d^2+bd+ad+ab+1$. Із нерівності про середні маємо:

$$a^2+b^2-d^2+bd+ad+ab+1\le 2\left(a^2+b^2\right)+1\le 2\cdot\left(2^2+2^2\right)+1=17.$$

Далі, при фіксованих a та b вираз $a^2+b^2+d^2+bd+ad-ab+3$ набуває максимального значення, при $d = 2$, і дорівнює в такому випадку

$$a^2+b^2-ab+2a+2b+7. \qquad (*)$$

Покладемо $a = 2–u$, $b = 2–v$. Підставляючи ці рівності у вираз (*), після перетворень отримуємо

$$19+u^2-4u+v^2-4v-uv=19+u(u-4)+v(v-4)-uv.$$

В останньому записі $u(u-4)+v(v-4)-uv\le 0$, оскільки $0\le u, v\le 2$. Тому

$$a^2 + b^2 - d^2 + bd + ad + ab + 1 \leq 19.$$

Рівність досягається при $a = b = 2$.

Відповідь. 19.