XXIV Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"***Турнір чемпіонів***"

2017 р.

Математика.

Старша ліга.

1. Нехай $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. Доведіть, що $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ для довільних цілих a та b.

2. Послідовність $a(n)$ задається рекурентним співвідношенням $a(n+2)=a(n)+a(n+1)$ з початковими значеннями $a(0)=20$, $a(1)=17$, а послідовність $b(n)$ – рекурентним співвідношенням $b(n+2)=b(n)-b(n+1)$ з початковими значеннями $b(0)=20$, $b(1)=18$. Обчисліть

$$a(2017)b(2018)+a(2018)b(2017).$$

3. На квадратній дошці 8×8 позначили деякі клітинки так, що в кожної із 64 клітинок є не більше однієї позначеної сусідньої клітинки (клітинки вважаються *сусідніми*, якщо в них є спільна сторона). Яка найбільша кількість клітинок могла бути позначеною?

4. Нехай AD – бісектриса трикутника ABC. Коло ω проходить через вершину A і дотикається до сторони BC в точці D. Це коло перетинає вдруге сторони AC і AB в точках M і N відповідно. Прямі BM і CN перетинають вдруге коло ω в точках P і Q відповідно. Прямі AP і AQ перетинають сторону BC в точках K і L відповідно. Доведіть, що $KL=\frac{1}{2}BC$.

5. Дано непарне натуральне число $a>100$. На дошці записали всі натуральні числа виду $\frac{a-n^2}{4}$, де *n* — натуральне число. Виявилось, що при $n\le\sqrt{\frac{a}{5}}$ всі вони прості. Довести, що і кожне із решти виписаних на дошці натуральних чисел є простим, або ж дорівнює одиниці.

XXI Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"***Турнір чемпіонів***"

2017 р.

Математика.

Старшая лига.

1. Пусть $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. Докажите, что $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ для произвольных целых a и b.

2. Последовательность $a(n)$ задается рекуррентным соотношением $a(n+2)=a(n)+a(n+1)$ с начальными значениями $a(0)=20$, $a(1)=17$, а последовательность $b(n)$ – рекуррентным соотношением $b(n+2)=b(n)-b(n+1)$ с начальными значениями $b(0)=20$, $b(1)=18$. Вычислите

$$a(2017)b(2018)+a(2018)b(2017).$$

3. На квадратной доске 8×8 отметили некоторые клетки так, что у каждой из 64 клеток имеется не более одной отмеченной соседней клетки (клетки считаются *соседними*, если у них есть общая сторона). Какое наибольшее количество клеток могло быть отмечено?

4. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC. Окружность ω проходит через вершину A и касается стороны BC в точке D. Эта окружность пересекает второй раз стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Прямые BM и CN пересекают второй раз окружность ω в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ пересекают сторону BC в точках K и L соответственно. Докажите, что $KL=\frac{1}{2}BC$.

5. Дано нечетное натуральное число $a>100$. На доску выписали все натуральные числа вида $\frac{a-n^2}{4}$, где n — натуральное число. Оказалось, что при $n\leq\sqrt{\frac{a}{5}}$ они все являются простыми. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел является простым, или же равно единице.