XXV Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"*Турнір чемпіонів*"

2018 р.

Математика.

Юніорська ліга

1. Цілі числа a, b, c та натуральне число n такі, що $a+b+c=1$ та $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Доведіть, що число $a^3+b^2-a^2-b^3$ ділиться на n.
2. Є десять осіб, серед яких 9 лицарів та 1 брехун (лицарі завжди говорять правду, брехуни – завжди брешуть). Кожному із них дали по одній картці з натуральним числом від 1 до 10, причому всі числа на картках різні. Будь-кому можна задати таке запитання: «Чи правда, що на твоїй картці написано число m?» (замість m називається натуральне число від 1 до 10). Чи правда, що за 17 таких запитань гарантовано можна знайти брехуна?
3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути A та C дорівнюють по 100°. На сторонах AB та BC обрали точки X та Y відповідно так, що $AX=CY$. Виявилося, що пряма YD паралельна до бісектриси кута ABC. Знайдіть кут AXY (в градусах).
4. Дано коло довжини 90. Чи можна позначити на ньому 10 точок так, щоб серед дуг з кінцями в цих точках знайшлись дуги зі всіма цілочисельними довжинами від 1 до 89?
5. Впорядкована трійка різних натуральних чисел (a,b,c) називається *надихаючою*, якщо при діленні a на b отримується остача c. Чи існує набір натуральних чисел, в якому надихаючих трійок рівно в 1000 разів більше, ніж чисел в цьому наборі?

XXV Всеукраинская комплексная олимпиада по математике, фізике и информатике

"***Турнир чемпионов***"
2018 г.
Математика.

Юниорская лига

1. Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$ делится на n.
2. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число m?» (вместо m называется натуральное число от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?
3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны по $100°$. На сторонах AB и BC выбрали точки X и Y соответственно так, что $AX=CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY (в градусах).
4. Дана окружность длины 90. Можно ли поставить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках нашлись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?
5. Упорядоченная тройка различных натуральных чисел (a,b,c) называется воодушевляющей, если при делении a на b получается остаток c. Существует ли набор натуральных чисел, в котором воодушевляющих троек ровно в 1000 раз больше, чем чисел в этом наборе?

XXV Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"***Турнір чемпіонів***"

2018 р.

Математика.

Старша ліга

1. Знайдіть всі невід'ємні корені рівняння:
$$x+\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x+2}=2.$$
2. По колу розташовано 10 пронумерованих фішок. Знайдіть кількість підмножин фішок, в яких є три фішки, що стоять підряд.
3. Вершина F паралелограма $ACEF$ лежить на стороні BC паралелограма $ABCD$. Відомо, що $AC=AD$ та $AE=2CD$. Доведіть, що $\angle CDE=\angle BEF$.
4. Знайдіть всі функції $f:N\to N$, які задовольняють рівність
$$f(n)+f(n+1)=f(n+2)\cdot f(n+3)-2016$$
при всіх $n\in N$.
5. Нехай m та n – натуральні числа. Розглянемо всі підмножини множини $\{1,2,3,\ldots,n\}$, враховуючи порожню. Для кожної підмножини обчислимо суму її елементів і остачу від ділення цієї суми на m (сумою елементів порожньої множини назвемо 0). Якщо виявиться, що кількість підмножин, для яких знайдена остача дорівнює k, однакова для всіх $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, то пару (m,n) назвемо *збалансованою*. Доведіть, що:

   1) якщо пара (m,n) збалансована, то $m=2^l$, де l – ціле невід'ємне число;

   2) якщо $m=2^l$, де l– ціле невід'ємне число, то знайдеться натуральне число n_0, таке, що при всіх натуральних $n>n_0$ пари (m,n) будуть збалансованими.

XXV Всеукраинская комплексная олимпиада по математике, фізике и информатике

"***Турнир чемпионов***"

2018 г.

Математика.

Старшая лига.

1. Найдите все неотрицательные корни уравнения:
$$x+\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x+2}=2.$$
2. По кругу расположены 10 пронумерованных фишек. Найдите количество подмножеств фишек, в каждом из которых найдутся 3 подряд стоящие фишки.
3. Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC=AD$ и $AE=2CD$. Докажите, что $\angle CDE=\angle BEF$.
4. Определите все функции $f:N\to N$, удовлетворяющие равенству
$$f(n)+f(n+1)=f(n+2)\cdot f(n+3)-2016$$

для всех $n\in N$.

5. Пусть m и n – натуральные числа. Рассмотрим все подмножества множества $\{1,2,3,\ldots,n\}$, включая пустое. Для каждого подмножества вычислим сумму его элементов и остаток от деления этой суммы на m (суммой элементов пустого множества назовем 0). Если окажется, что количество подмножеств, для которых найденный остаток равен k, одно и то же для всех $k\in\{0,1,...,m-1\}$, то пару (m,n) назовем *сбалансированной*. Докажите, что:

   1) если пара (m,n) сбалансирована, то $m=2^l$, де l – целое неотрицательное число;

   2) если $m=2^l$, где l– целое неотрицательное число, то найдется натуральное число n_0, такое, что при всех натуральных $n>n_0$ пары (m,n) будут сбалансированными.