XXVI відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики „Турнір Чемпіонів“

Математика. Розв'язання задач

Старша ліга

1. Нехай $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ — попарно різні зведені квадратні тричлени (тобто їх старші коефіцієнти дорівнюють 1) з додатними дискримінантами. Яку найбільшу кількість коренів може мати рівняння

$$(f_1 \cdot f_2)^2 + (f_2 \cdot f_3)^2 + (f_3 \cdot f_1)^2 = 0?$$

Розв'язання. Рівняння зводиться до системи

$$\begin{cases} f_1 \cdot f_2 = 0, \\ f_2 \cdot f_3 = 0, \\ f_3 \cdot f_1 = 0. \end{cases}$$

Припустимо, що задане рівняння має хоча б 4 корені. Тоді ці корені будуть коренями кожного рівняння системи. Нехай $f_1 = (x - x_1)(x - x_2)$, $f_2 = (x - x_3)(x - x_4)$. Тоді числа x_1, x_2, x_3, x_4 — корені першого рівняння системи, а тому вони попарно різні, і саме вони є коренями заданого рівняння. Так як $f_2 \cdot f_3 = 0$, то x_1 та x_2 будуть коренями f_3, тобто f_1 та f_3 співпадають, що суперечить умові.

Наведемо приклад на три корені: $f_1 = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, $f_2 = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, $f_3 = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Коренями є числа 1, 2, 3.

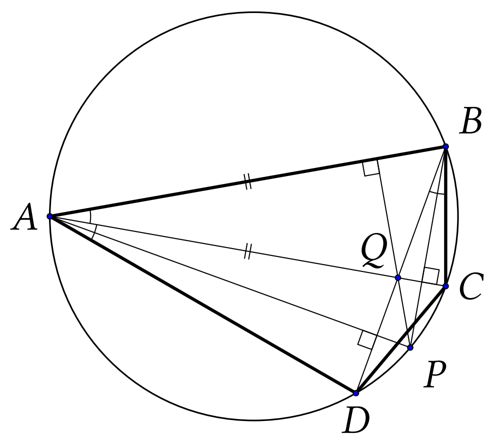
Відповідь. 3.

2. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло і довжини сторін BC та DC рівні, а довжина сторони AB дорівнює довжині діагоналі AC. Нехай точка P — середина дуги CD, що не містить точку A, та Q — точка перетину діагоналей AC та BD. Доведіть, что прямі PQ та AB перпендикулярні.

Розв'язання. Доведемо, що пряма PQ містить висоту трикутника AQB, проведену із вершини Q. З цього і буде слідувати, що вона перпендикулярна відрізку AB.

З самого початку зазначимо, що трикутник CBQ рівнобедрений з вершиною B. Позначимо величину кута BAC за $2x$. Через рівність сторін BC та DC величина кута CAD теж дорівнює $2x$. Кут CAD дорівнює куту CBD, як вписані, що спираються на дугу CD, тому і кут CBD, дорівнює куту CBQ, і теж дорівнює $2x$. В рівнобедреному трикутнику ABC кути ABC та BCA, дорівнюють куту BCQ, і рівні по $90^\circ - x$. Третій кут CQB трикутника BCQ тоді дорівнює $180^\circ - 2x - (90^\circ - x) = 90^\circ - x$, тобто дорівнює куту BCQ.

Отже, трикутник CBQ рівнобедрений з вершиною B. Через те, що P середина дуги CD, пряма BP є бісектрисою кута CBQ при вершині B рівнобедреного трикутника та перпендикулярна його основі CQ. З цього слідує, що пряма BP перпендикулярна до прямої CA, а тому BP — пряма, яка містить висоту трикутника AQB із вершини B.



У трикутнику QAD $\angle QAD = \angle CAD$ дорівнює куту CBD як вписаний, що спирається на дугу CD, $\angle ADQ = \angle ACB$, як вписані, що спираються на дугу AB, а $\angle AQD = \angle BQC$, як вертикальні. Тому трикутник QAD подібний трикутнику CBQ, а тому теж рівнобедрений. Пряма AP знову є бісектрисою кута при його вершині і перпендикулярна QD. З цього слідує, що AP містить висоту трикутника Q, проведену із вершини A.

Таким чином, точка P буде точкою перетину висот трикутника AQB, а це означає, що пряма PQ містить третю висоту цього треугольника, яка проведена із вершини Q та перпендикулярна AB, що і потрібно було довести.

3. Знайдіть всі натуральні числа n, які можна подати у вигляді суми $n = x + y + (x, y) + [x, y]$ для деяких натуральних чисел x та y. Тут (x, y) та $[x, y]$ означають найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел x і y відповідно.

Розв'язання. Якщо числа x та y однієї парності, то всі чотири доданки x, y, (x, y), $[x, y]$ мають однакову парність і їх сума парна. Якщо вони мають різну парність, то число (x, y) непарне, $[x, y]$ парне, тому в сумі буде два парних і два непарних числа, і сума знову буде парною. Кожний доданок суми не менший за одиницю, а тому вся сума не менша за 4. Це означає, що відповіддю в задачі може бути лише парне число, яке більше за 2.

З іншого боку, для довільного парного $n > 2$ покладемо $x = 1$, $y = \frac{n}{2} - 1$, отримаємо $(x, y) = 1$ та $[x, y] = y = \frac{n}{2} - 1$. З цього маємо $x + y + (x, y) + [x, y] = n$ — подається у необхідному вигляді.

Другий спосіб. Якщо позначити $(x, y) = d$, то $x = x_1 d$, $y = y_1 d$, $[x, y] = x_1 y_1 d$, де x_1, y_1 — взаємно прості, а тому одне із них обов'язково непарне. Тоді $n = x + y + (x, y) + [x, y] = d(1 + x_1)(1 + y_1)$, де два останні множники не менші за 2, а один із них обов'язково парний. Отже, відповіддю в задачі може бути лише парне число, яке більше за два. Далі все як в першому способі розв'язання.

Відповідь. Усі парні числа, які більші за 2.

4. Десятковий запис натурального числа N складається лише із одиниць та двійок. Відомо, що викреслюванням цифр в цьому числі можна отримати будь-яке із 10 000 чисел, які складаються із 9999 одиниць та однієї двійки. Знайти найменшу можливу кількість цифр у записі числа N.

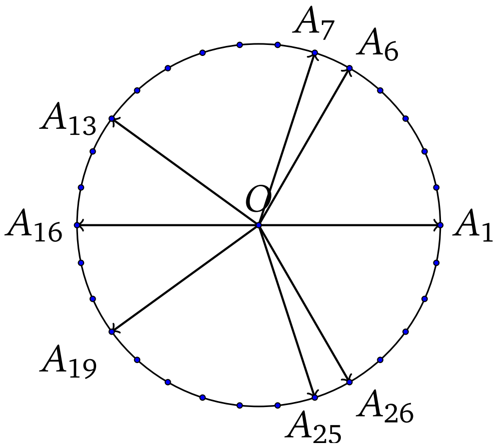
Розв'язання. *Приклад.* Число $\underbrace{\underbrace{1\ldots1}_{99}2\underbrace{1\ldots1}_{100}2\ldots2\underbrace{1\ldots1}_{100}2\underbrace{1\ldots1}_{99}}_{100\text{ двійок}}$ (на початку та в кінці — по 99 одиниць, між сусідніми двійками — по 100 одиниць). Число із 9999 одиниць та двійок, де перед двійкою стоїть $100m+n$ одиниць ($0 \leqslant m, n \leqslant 99$) отримується викреслюванням усіх двійок, крім $(m+1)$-ої, $99-n$ одиниць перед нею та n одиниць за нею. Усього число містить 10 198 цифр.

Оцінка. Помітимо, що в числі N немає двох двійок, розташованих поспіль — інакше його можна вкоротити, викреслюванням однієї із цих двійок. Нехай число N містить k двійок, перед першою двійкою йдуть a_0 одиниць, між першою та другою — a_1 одиниць, ..., после останньої двійки — a_k одиниць. Покладемо $s = a_0 + \ldots + a_k$. Для отримання числа, у якого перед двійкою одна одиниця, нам необхідно викреслити не менше $a_0 - 1$ одиниці. Тому число $s - (a_0 - 1)$ повинно бути не менше 9999, тобто $s - a_0 \geqslant 9998$. Для отримання числа, у якого перед двійкою $a_0 + 1$ одиниця, вимушені викрислити першу двійку і не менше $a_1 - 1$ одиниці. З цього отримуємо нерівність $s - a_1 \geqslant 9998$. Для отримання числа, у якого перед двійкою $a_0 + a_1 + 1$ одиниця, вимушені будемо викреслити дві перших двійки і не менше $a_2 - 1$ одиниць, з чого отримуємо нерівність $s - a_2 \geqslant 9998$. Міркуючи аналогічно, отримуємо, що нерівність $s - a_i \geqslant 9998$ виконується при всіх i від 0 до $k-1$; крім того, для отримання числа, в якому двійка записана останньою, необхідно, щоб $s - a_k \geqslant 9999$. Додавши всі ці нерівності, отримуємо нерівність $(k+1)s - s \geqslant 9998(k+1) + 1$, тоді $ks > 9998(k+1)$, $s > 9998 + \frac{9998}{k}$. Оскільки в шуканому числі іще і k двійок, то кількість цифр в нього більша, ніж $9998 + \frac{9998}{k} + k \geqslant 9998 + 2\sqrt{9998} > 10\,197$, що і потрібно було довести.

Відповідь. 10 198.

5. Нехай дано натуральне число $n \geqslant 2$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$, де точка O — початок координат, а точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершини правильного n-кутника, вписаного в одиничне коло з центром в точці O (при $n = 2$ n-кутник вироджується у відрізок). Будемо розглядати непорожні набори різних векторів з нульовою сумою (*нульові набори*). Назвемо нульовий набір *найпростішим*, якщо кінці векторів цього набору — це всі вершини правильного p-кутника, де p — простий дільник n (при $p = 2$ p-кутник вироджується у відрізок). Чи правда, що для довільного $n \geqslant 2$ довільний нульовий набір, який не є найпростішим, можна подати у вигляді об'єднання декількох найпростіших нульових наборів, які не перетинаються?

Розв'язання. Доведемо, що у вигляді вказаного в умові об'єднання нульовий набір подається не завжди. Розглянемо $n = 30$. Прості дільники числа 30 — це 2, 3, 5. Побудуємо нульовий набір наступним чином. Нехай дано правильний 30-кутник $A_1A_2\ldots A_{30}$, вписаний в одиничне коло з центром в точці O. Розглянемо нульовий набір векторів з кінцями у вершинах правильного пятикутника: $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_7}$, $\overrightarrow{OA_{13}}$, $\overrightarrow{OA_{19}}$, $\overrightarrow{OA_{25}}$. Розглянемо також нульовий набір векторів з кінцями у вершинах правильного трикутника: $\overrightarrow{OA_6}$, $\overrightarrow{OA_{16}}$, $\overrightarrow{OA_{26}}$. І на кінець, розглянемо нульовий набір із двох протилежних векторів: $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_{16}}$. Помічаємо, що тоді набір із векторів $\overrightarrow{OA_6}$, $\overrightarrow{OA_7}$, $\overrightarrow{OA_{13}}$, $\overrightarrow{OA_{19}}$, $\overrightarrow{OA_{25}}$, $\overrightarrow{OA_{26}}$ є нульовим (див. рисунок).



Справді,

$$\overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_{13}} + \overrightarrow{OA_{19}} + \overrightarrow{OA_{25}} + \overrightarrow{OA_{26}} =$$
$$(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_{13}} + \overrightarrow{OA_{19}} + \overrightarrow{OA_{25}}) + (\overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_{16}} + \overrightarrow{OA_{26}}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_{16}}) =$$
$$\vec{0} + \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}.$$

При цьому він не є об'єднанням непустих нульових наборів, які не перетинаються. Дійсно, наш набір містить 6 векторів. Якби його можна було б подати у вигляді вказаного об'єднання, то це були б набори векторів з кінцями у вершинах правильних пятикутника,трикутника та двохкутника. Двохкутники неможливі, оскільки ні для однієї із точок A_6, A_7, A_{13}, A_{19}, A_{25}, A_{26} немає протилежної, яка відповідає якомусь вектору із нашого набору. Правильні трикутники теж неможливі. Дійсно, такий многокутник разом із вершиною A_6 містив би вершину A_{16}, з вершиною A_7 містив би A_{17}, з вершиною A_{13} вершину A_{23}, з вершиною A_{19} вершину A_{29}, з вершиною A_{25} вершину A_{15}, з вершиною A_{26} вершину A_{16}. Аналогічно доводиться, що правильні пятикутники також неможливі. Отже, ми побудували нульовий набір (при $n = 30$), який не є об'єднанням найпростіших нульових наборів, які не перетинаються.

Відповідь. Неправда.