XXVI відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики ,,Турнір Чемпіонів“

Математика. Розв'язання задач

Юніорська ліга

1. Знайдіть максимальну кількість послідовних трицифрових чисел, в записі кожного із яких є хоча б одна непарна цифра.

Відповідь. 111.

Розв'язання. Прикладом 111 таких чисел є, наприклад, 289, 290, 291, . . . , 398, 399. Перед ними та після них йдуть 288 та 400, які не містять в своєму записі непарних цифр, а тому продовжити цей приклад вліво або вправо неможливо. Аналогічні серії отримуються для початкових чисел 489, 689 та 889.

Розглянемо числа 100, 200, 288, 400, 488, 600, 688, 800, 888, 999. Різниця між кожними двома сусідніми не перевищує 112, тому кожні 112 послідовних трицифрових чисел містять принаймні одне із чисел 200, 288, 400, 488, 600, 688, 800, 888. Таким чином, не існує 112 чисел, які задовольняють умову задачі.

2. Про число N відомо, що воно дорівнює добутку десяти простих чисел (не обов'язково різних). Крім того, якщо кожний із цих десяти множників збільшити на одиницю, то отриманий добуток буде ділитися на N. Знайдіть всі можливі значення N.

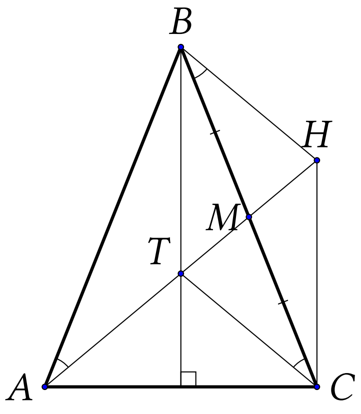
Відповідь. $N = 2^5 \cdot 3^5$ або $N = 2^6 \cdot 3^4$.

Розв'язання. Із простих дільників числа N розглянемо найбільше. Позначимо його p. Припустимо, що воно більше 3. Тоді після збільшення усіх множників на 1 новий добуток не може ділитися на p. Справді, p та $p + 1$ взаємно прості, а усі менші множники після збільшення на 1 все ще менші за p. Оскільки нове число не ділиться p, то і на N воно ділитися не може.

Тоді всі прості числа в розкладі числа N — це 2 та 3. Тобто $N = 2^a \cdot 3^{10-a}$. Після збільшення усіх множників на 1 отримуємо число $3^a \cdot 4^{10-a} = 2^{20-2a} \cdot 3^a$. Для того, щоб нове число ділилося на N, необхідно і достатньо, щоб $20 - 2a \geqslant a$ і $a \geqslant 10 - a$, тобто $\frac{20}{3} \geqslant a$ і $a \geqslant 5$. Тоді $a = 5$ або $a = 6$, тобто $N = 2^5 \cdot 3^5$ або $N = 2^6 \cdot 3^4$.

3. На продовженні медіани AM рівнобедреного трикутника ABC з основою AC за точку M взяли точку P таку, що кут CBP дорівнює куту BAP. Знайдіть величину кута ACP.

Розв'язання. Нехай T — точка перетину медіани AM та висоти, опущеної з вершини B. В силу того, що трикутник ABC рівнобедрений, ця висота є серединним перпендикуляром до AC, а тоді $AT = CT$. BT перпендикулярний AC і кути BAT та BCT рівні. Відкладемо від вершини C відрізок CH, рівний та паралельний відрізку BT. Трикутники BTM та CHM рівні за сторонами $BT = CH$, $BM = MC$ та кутами TBM і HCM між ними. Це означає що кути BMT та CMH вертикальні, а точка H належить променю AM. Крім того, у паралелограма $BTCH$ $\angle BCT = \angle BAT = \angle BAP = \angle CBH$, а тому, точки H та P співпадають. Отже, $\angle ACP = \angle ACH = 90^\circ$ в силу паралельності CH та серединного перпендикуляра BT до AC.



Відповідь. 90°.

4. Нехай m та n — непарні натуральні числа. Кожну клітинку таблиці із m рядків та n стовпців покрасили в жовтий або синій колір. Назвемо рядок у цій таблиці *жовтуватим*, якщо в ньому більше жовтих клітинок, ніж синіх. Назвемо стовпчик *синюватим*, якщо в ньому більше синіх клітинок, ніж жовтих. Якого найбільшого значення може набувати загальна кількість жовтуватих рядків й синюватих стовпчиків?

Розв'язання. Нехай одне із чисел дорівнює 1: не порушуючи загальності нехай $n = 1$. Тоді або всі клітинки сині, і шукана кількість дорівнює m, або є хоча б одна жовта, і загальна кількість не більша за 1 (1 стовпчик) $+(m-1)$ (не більше $m-1$ рядків) $= m$.

Надалі вважаємо, що обидва числа не менші за три. Позначимо загальну кількість *жовтуватих* рядків та *синюватих* стовпчиків через X. Припустимо, що $X = n + m$. Тоді всі рядки жовтуваті, а все стовпчики синюваті. Але тоді, якщо дивитись по рядкам, всього в таблиці більше жовтих клітинок, а якщо по стовпчикам — то всього більше синіх клітинок. Протиріччя.

Припустимо тепер, що $X = n + m - 1$. Без обмеження загальності, вважаємо, що всі рядки *жовтуваті*, а всі, окрім одного, стовпчика *синюваті*.

Нехай $m = 2a - 1$, $n = 2b - 1$. Тоді в кожному рядку хоча б b жовтих клітинок. Отже, всього в таблиці хоча б $b(2a-1)$ жовтих клітинок. У всіх, крім одного, стовпчиках хоча б a синіх клітинок. Отже, всього синіх клітинок хоча б $a(2b-2)$. Тому всього в таблиці хоча б $b(2a-1)+a(2b-2) = 4ab-b-2a$ клітинок. Але всього в таблиці клітинок рівно $(2a-1)(2b-1) = 4ab-2a-2b+1 = (4ab-b-2a)+(1-b) < 4ab-b-2a$, оскільки $b \geqslant 2$. Отримуємо протиріччя.

Наведемо приклад розфарбування, при якому $X = n + m - 2$. Пофарбуємо перший стовпчик повністю в жовтий колір, а весь верхній рядок, крім самої лівої клітинки — в синій. Решту заповнимо в шаховому порядку. Всі нижні $m - 1$ рядки *жовтуваті*, а всі праві $n - 1$ стовпчиків — *синюваті*. Отже, це і є шуканий приклад.

Відповідь. Якщо $m = 1$, то n; Якщо $n = 1$, то m; Якщо $n, m > 1$, то $n+m-2$.

5. В кожній клітинці шахової дошки 8×8 стоїть маляр з відерцями чорної та білої фарби. Для кожної клітинки задано напрямок руху маляра в сусідню по стороні клітинку так, щоб жодна клітинка не залишилась порожньою. За один хід всі маляри одночасно переміщуються згідно напрямку. Кожний маляр — або *монархіст*, або *революціонер*. Потрапивши в клітинку, *монархіст* фарбує її у колір клітинки, з якої він прийшов. *Революціонер* фарбує клітинку у колір, протилежний кольору клітинки, з якої він прийшов. Мюнхгаузен та Врунгель задані напрямки для клітинок не знають, але побачивши, що одного разу вся верхня половина дошки виявилася білою, заявили наступне. Мюнхгаузен: «Протягом наступних 10 000 ходів іще зустрінеться розфарбування дошки, в якій верхня половина — біла». Врунгель: «Протягом наступних 10 000 ходів якісь розфарбування точно співпадуть». Чи правий Мюнхгаузен? Чи правий Врунгель?

Відповідь. Мюнхгаузен правий, а Врунгель не правий.

Розв'язання. Напрямки руху малярів розбивають дошку на цикли парної довжини. Рівно через НСК довжин усіх циклів маляри повернуться на початкові клітинки. Можуть існувати не більше ніж 4 цикли довжиною більшою за 2, що містять клітинки і верхньої, і нижньої половин дошки. Нехай їхні довжини $2a$, $2b$, $2c$ та $2d$ (випадок меншої кількості циклів розглядається аналогічно). Тоді їх НСК не перевищує $2abcd$ (де $a + b + c + d$ не перевищує 32), що менше або дорівнює $2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8192 < 10000$. За цей час розфарбування в цих циклах співпадуть з тими, що бачили Мюнхгаузен та Врунгель. В циклах, які повністю належать верхній половині шахівниці, період розфарбування має довжину 2 (або всі білі, або всі чорні — тут враховуємо, що існує повністю біле розфарбування клітинок циклу), цикли довжиною 2 теж не змінюють ситуацію. Отже, Мюнхгаузен правий.

Однак можна розбити дошку на цикли з довжинами 6, 8, 10, 14, 26:

$g1 - g2 - g3 - h3 - h2 - h1 - g1$ — довжина 6,

$e3 - e4 - e5 - e6 - f6 - f5 - f4 - f3 - e3$ — довжина 8,

$h4 - g4 - g5 - g6 - g7 - g8 - h8 - h7 - h6 - h5 - h4$ — довжина 10,

$d4 - c4 - c5 - c6 - c7 - c8 - d8 - e8 - f8 - f7 - e7 - d7 - d6 - d5 - d4$ — довжина 14,

$a3 - a4 - a5 - a6 - a7 - a8 - b8 - b7 - b6 - b5 - b4 - b3 - b2 - c2 - c3 - d3 - d2 - e2 - f2 - f1 - e1 - d1 - c1 - b1 - a1 - a2 - a3$ — довжина 26.

На момент, коли висловлюються Мюнхгаузен та Врунгель, розставимо малярів так: у верхній половині дошки на білих клітинках спочатку — монархісти, а на чорних клітинках спочатку — революціонери. На першу з вказаних у циклах клітинках ставимо революціонера (ці клітинки спочатку були чорними), а на решту клітинок нижньої частини – монархістів. НСК довжин циклів дорівнює 10 920, а тому лише через 10 920 ходів картинка повториться. Тому Врунгель не правий.