Математика.

Старша ліга

1. Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ – попарно різні зведені квадратні тричлени (тобто їх старші коефіцієнти дорівнюють 1) з додатними дискримінантами. Яку найбільшу кількість коренів може мати рівняння $(f_1 \cdot f_2)^2 + (f_2 \cdot f_3)^2 + (f_3 \cdot f_1)^2 = 0$?

2. Чотирикутник *ABCD* вписано в коло і довжини сторін *BC* та *DC* рівні, а довжина сторони *AB* дорівнює довжині діагоналі *AC*. Нехай точка *P* – середина дуги *CD*, що не містить точку *A*, та *Q* – точка перетину діагоналей *AC* та *BD*. Доведіть, що прямі *PQ* та *AB* перпендикулярні.

3. Знайдіть всі натуральні числа *n*, які можна подати у вигляді суми $n = x + y + (x, y) + [x, y]$ для деяких натуральних чисел *x* та *y*. Тут (x, y) та $[x, y]$ означають найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел *x* і *y* відповідно.

4. Десятковий запис натурального числа *N* складається лише із одиниць та двійок. Відомо, що викреслюванням цифр в цьому числі можна отримати будь-яке із 10000 чисел, які складаються із 9999 одиниць та однієї двійки. Знайти найменшу можливу кількість цифр у записі числа *N*.

5. Нехай дано натуральне число $n \geq 2$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$, де точка *O* – початок координат, а точки A_1, A_2, ..., A_n – вершини правильного *n*-кутника, вписаного в одиничне коло з центром в точці *O* (при $n = 2$ *n*-кутник вироджується у відрізок). Будемо розглядати непорожні набори різних векторів з нульовою сумою (*нульові набори*). Назвемо нульовий набір *найпростішим*, якщо кінці векторів цього набору – це всі вершини правильного *p*-кутника, де *p* – простий дільник *n* (при $p = 2$ *p*-кутник вироджується у відрізок). Чи правда, що для кожного $n \geq 2$ довільний нульовий набір, який не є найпростішим, можна подати у вигляді об'єднання декількох найпростіших нульових наборів, які не перетинаються?

XXVI Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики "*Турнір чемпіонів*"

Математика.

Старшая лига

1. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ – попарно различные приведённые квадратные трёхчлены (т.е. их старшие коэффициенты равны 1) с положительными дискриминантами. Какое наибольшее количество корней может иметь уравнение $(f_1\cdot f_2)^2+(f_2\cdot f_3)^2+(f_3\cdot f_1)^2=0$?

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P – середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q – точка пересечения диагоналей AC и BD. Докажите, что прямые PQ и AB перпендикулярны.
3. Найдите все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы $n=x+y+(x,y)+[x,y]$ для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x,y) и $[x,y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

4. Десятичная запись натурального числа N состоит только из единиц и двоек. Известно, что вычеркиванием цифр в этом числе можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее количество цифр в записи числа N.

5. Пусть дано натуральное число $n\geq 2$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$, где точка O – начало координат, а точки A_1, A_2, ..., A_n – вершины правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность с центром в точке O (при $n=2$ n-угольник вырождается в отрезок). Будем рассматривать непустые наборы различных векторов с нулевой суммой (*нулевые наборы*). Назовём нулевой набор *простейшим*, если концы векторов этого набора – это все вершины правильного p-угольника, где p – простой делитель n (при $p=2$ p-угольник вырождается в отрезок). Верно ли, что для каждого $n\geq 2$ произвольный нулевой набор, не являющийся простейшим, можно представить в виде объединения нескольких простейших не пересекающихся нулевых наборов?