XXII відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір Чемпіонів»

Юніорська ліга

Математика. Розв'язання задач

1. Довести, що для довільного дійсного x виконується рівність

$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$

(тут $[x]$ — це найбільше ціле число, яке не перевищує x.)

Розв'язання. Нехай $x=a+\alpha$, де a — ціле, а $\alpha\in[0,1)$ — дробова частина числа x. Позначимо через $S(x)$ і $T(x)$ відповідно ліву і праву частини рівності, що доводиться. Розглянемо три випадки.

1. $\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$. Тоді

$$S(x)=a+a+a=3a;$$
$$T(x)=[3(a+\alpha)]=[3a+3\alpha]=3a+[3\alpha]=3a.$$

2. $\alpha\in\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Тоді

$$S(x)=a+a+(a+1)=3a+1;$$
$$T(x)=[3(a+\alpha)]=[3a+3\alpha]=3a+[3\alpha]=3a+1.$$

3. $\alpha\in\left[\frac{2}{3};1\right)$. Тоді

$$S(x)=a+(a+1)+(a+1)=3a+2;$$
$$T(x)=[3(a+\alpha)]=[3a+3\alpha]=3a+[3\alpha]=3a+2.$$

Як бачимо, в кожному з цих випадків $S(x)=T(x)$, що і треба було довести.

2. На площині дано чотири точки: $A(0;0)$, $B(2015;2015)$, $C(0;2015)$, $D(-2015;0)$. Знайти усі такі пари цілих чисел $(b;c)$, для яких графік квадратного тричлена $y=x^2+bx+c$ перетинає кожну із прямих AB, BC, CD та DA, причому усі точки перетину мають цілі координати.

Відповідь. таких пар чисел не існує.

Розв'язання. Абсциси точок перетину параболи з вказаними прямими є коренями таких квадратних рівнянь: $x^2+bx+c=0$ (з прямою AD), $x^2+bx+(c-2015)=0$ (з прямою BC), $x^2+(b-1)x+c=0$ (з прямою AB), $x^2+(b-1)x+(c-2015)=0$ (з прямою CD). Помітимо, що із отриманих чотирьох рівнянь хоча б одне має обидва непарних коефіцієнти.

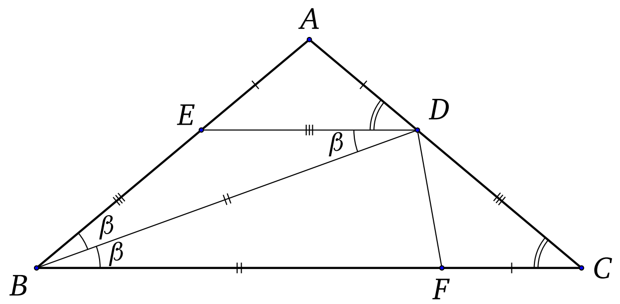
Доведемо, що квадратне рівняння $x^2+bx+c=0$ не має цілих коренів, якщо коефіцієнти b та c — непарні. Справді, нехай x_1 та x_2 — цілі корені вказаного рівняння. Тоді за теоремою Вієта $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$. Якщо припустити, що c — непарне, то тоді непарними повинні були б бути і числа x_1, x_2. Проте тоді їхня сума є парною, що суперечить припущенню про непарність b.

Отже, хоча б одне з чотирьох вказаних рівнянь має не цілі корені, а значить чисел b,c, які б задовольняли умову задачі, не існує.

3. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) проведено бісектрису BD (точка D належить AC). Відомо, що $BC = BD + AD$. Знайти градусну міру кута BAC.

Відповідь. $100°$.

Розв'язання. Нехай $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \angle DBC = \beta$, $\angle ABC = \angle ACB = 2\beta$.



Проведемо DE паралельно BC (точка E належить AB). Тоді $AE = AD$, $BE = CD$, $\angle AED = \angle ADE = 2\beta$. Відмітимо точку F на BC так, щоб $BF = BD$, тоді $FC = AD$.

Оскільки $\angle EDB = \angle DBC = \beta$, то чотирикутник BDE — рівнобедрений, $DE = BE = CD$. Розглянемо трикутники AED і CFD. Вони рівні за двома рівними сторонами і куту між ними, оскільки $DE = CD$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle ACB = \angle DCF = 2\beta$. Тоді $\angle DFC = \angle BAC = \alpha$, $\angle DFB = 180° - \alpha$. Отримуємо два рівняння для кутів трикутника CFD і трикутника DFB:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 180°, \\ \beta + 360° - 2\alpha = 180°. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $\beta = 20°$, $\alpha = 100°$.

4. Дільник натурального числа назвемо ***власним***, якщо він відмінний від 1 і самого цього числа. Натуральне число назвемо ***гарним***, якщо найбільший власний дільник цього числа дорівнює сумі власного дільника, другого за величиною і власного дільника, третього за величиною. Наприклад, число 18 є гарним, оскільки 9 (його найбільший власний дільник) дорівнює сумі чисел 6 (другий власний дільник за величиною) і 3 (третій власний дільник за величиною). Скільки існує гарних чисел, які не перевищують 1 500 000?

Відповідь. 100 000.

Розв'язання. Нехай N — гарне число. Передусім зауважимо, що N парне. Справді, у непарного числа всі дільники непарні, а сума двох непарних чисел не може дорівнювати непарному числу. Тому найменший власний дільник числа N дорівнює 2, а найбільший, відповідно, $\frac{N}{2}$.

Вважаючи, що власні дільники числа пронумеровано за зростанням, позначимо через a і b відповідно другий і третій власні дільники числа N (перший власний дільник дорівнює 2). Тоді повинна виконуватись рівність

$$\frac{N}{2} = \frac{N}{a} + \frac{N}{b}.$$

Якщо $a \geqslant 4$, то

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{b} \leqslant \frac{N}{4} + \frac{N}{5} < \frac{N}{2}.$$

Отже, $a = 3$. Тоді $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, тобто $b = 6$.

Це означає, що число N ділиться на 6, але не ділиться на 4 та 5. Остання умова означає, що число N при діленні на 60 дає одну із остач: 6, 18, 42, 54. Таким чином, серед кожних 60-ти послідовних чисел чотири гарних. Тому маємо $4 \cdot \frac{1\,500\,000}{60} = 100\,000$ гарних чисел, які не перевищують півтора мільйони.

5. Усі натуральні числа пофарбовано у два кольори: чорний і білий. Відомо, що для довільних двох чисел різного кольору їхня сума є чорним числом, а добуток — білим.

а) Якого кольору може бути добуток двох білих чисел?

б) Знайти усі розфарбування чисел, які задовольняють умову задачі.

Розв'язання. а) Припустимо, що числа m і n білого кольору. Доведемо, що число mn також білого кольору. Розглянемо деяке число k чорного кольору. Тоді число $m + k$ також чорне, а число $(m + k)n = mn + kn$ — біле. Якщо припустити, що mn чорного кольору, то сума $mn + kn$ повинна була б бути чорною, як сума різнокольорових чисел (kn — біле як добуток чисел різного кольору). Одержана суперечність і доводить, що добуток mn не може бути чорним, а отже він є білим.

б) Таким чином, з умови задачі і доведеного в п. а) випливає, що якщо хоча б один з множників добутку двох чисел є білим, то і весь добуток є білим числом.

Нехай a — *найменше* біле число. Тоді за доведеним вище числа виду $k \cdot a$ ($k \in \mathbb{N}$) також є білими. Доведемо, що інших білих чисел немає. Розглянемо довільне число n, яке не ділиться на a. Подамо його у вигляді $n = p \cdot a + r$, де $0 < r < a$. Оскільки $r < a$, то r — чорне, а $p \cdot a$ — біле. Тоді n є чорним числом (як сума двох чисел різного кольору).

Легко перевіряється, що розфарбування чисел, які діляться на a (a — довільне фіксоване натуральне число, більше 1), в білий колір, а чисел, які не діляться на a — в чорний, задовольняє умову задачі.