XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"*Турнір чемпіонів*"

2015 р.

Математика. Юніорська ліга

1. Довести, що для довільного дійсного x виконується рівність
$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$
(тут $[x]$ – це найбільше ціле число, яке не перевищує x).

2. На площині дано чотири точки: $A(0;0)$, $B(2015;2015)$, $C(0;2015)$, $D(-2015;0)$. Знайти усі такі пари цілих чисел $(b;c)$, для яких графік квадратного тричлена $y=x^2+bx+c$ перетинає кожну із прямих AB, BC, CD та DA, причому усі точки перетину мають цілі координати.

3. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=AC$) проведено бісектрису BD (точка D належить AC). Відомо, що $BC=BD+AD$. Знайти градусну міру кута BAC.

4. Дільник натурального числа назвемо ***власним***, якщо він відмінний від 1 і самого цього числа. Натуральне число назвемо ***гарним***, якщо найбільший власний дільник цього числа дорівнює сумі власного дільника, другого за величиною і власного дільника, третього за величиною. Наприклад, число 18 є гарним, оскільки 9 (його найбільший власний дільник) дорівнює сумі чисел 6 (другий власний дільник за величиною) і 3 (третій власний дільник за величиною). Скільки існує гарних чисел, які не перевищують 1500000?

5. Усі натуральні числа пофарбовано у два кольори: чорний і білий. Відомо, що для довільних двох чисел різного кольору їхня сума є чорним числом, а добуток – білим.
а) Якого кольору може бути добуток двох білих чисел? Відповідь обґрунтуйте.
б) Знайти усі розфарбування чисел, які задовольняють умову задачі.

XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"*Турнір чемпіонів*"

2015 р.

Математика. Юниорская лига

1. Доказать, что для произвольного действительного x выполняется равенство
$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$
(здесь $[x]$ – наибольшее целое число, не превышающее x).
2. На плоскости задано четыре точки: $A(0;0)$, $B(2015;2015)$, $C(0;2015)$, $D(-2015;0)$. Найти все такие пары целых чисел $(b;c)$, для которых график квадратного трехчлена $y=x^2+bx+c$ пересекает каждую из прямых AB, BC, CD и DA, причём все точки пересечения имеют целые координаты.
3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) проведена биссектриса BD (точка D принадлежит AC). Известно, что $BC=BD+AD$. Найти градусную меру угла BAC.
4. Делитель натурального числа назовём ***собственным,*** если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём ***красивым***, если наибольший собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине, и собственного делителя третьего по величине. Например, число 18 является красивым, поскольку 9 (его наибольший собственный делитель) равняется сумме чисел 6 (второй собственный делитель по величине) и 3 (третий собственный делитель по величине). Сколько существует красивых чисел, которые не превосходят 1500000?
5. Все натуральные числа покрашены в два цвета: чёрный и белый. Известно, что для произвольных двух чисел разного цвета их сумма является чёрным числом, а их произведение – белым.

   а) Какого цвета может быть произведение двух белых чисел? Ответ обоснуйте.

   б) Найти все раскраски чисел, удовлетворяющие условию задачи.