

XXIII відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики,
фізики та інформатики «Турнір Чемпіонів»
Математика. Розв'язання задач
Юніорська ліга

1. Для яких натуральних k , які не перевищують 2015, прямокутник $k \times 2016$ можна розрізати на прямокутники 1×2015 і трьохклітинкові «куточки» так, щоб були наявними фігурки обох видів?

Відповідь. Лише для $k = 2015$.

Розв'язання. Доведемо, що для $k < 2015$ потрібне розрізання неможливе. Припустимо, що можливе. Вважатимемо, що заданий прямокутник розташовано так, що його довша сторона є горизонтальною. Очевидно, що кожний із прямокутників 1×2015 торкається однієї із коротких сторін прямокутника $k \times 2016$, а від другої сторони віддалений на одну клітинку. Ця непокрита прямокутником клітинка повинна бути покрита куточком, оскільки $k < 2015$. Назвемо прямокутник 1×2015 *чорним* (відповідно *білим*), якщо ця остання непокрита прямокутником клітинка рядочка, в якому він розташований, покрита куточком так, що дві інші клітинки цього куточка знаходяться вище (відповідно, нижче) цього прямокутника.

Розглянемо «найнижчий» із прямокутників 1×2015 . Він повинен бути чорним, оскільки в іншому випадку нижче нього розташовується прямокутник $2016 \times k$, кількість клітинок якого ділиться на 3 і який повинен бути повністю закладений трьохклітинковими куточками та однією «доміношкою» із двох клітинок, що неможливо. З тієї ж причини «найвищий» із прямокутників 1×2015 повинен бути білим. Але тоді серед прямокутників 1×2015 знайдуться чорний та білий (причому білий лежить вище цього чорного), між якими немає інших таких прямокутників. Внутрішній між ними прямокутник має розміри $l \times 2016$ (загальна кількість клітин кратна 3). Він повинен бути повністю закладений трьохклітинковими куточками та двома «доміношками», що неможливо.

Доведемо, що для $k = 2015$ розрізання можливе, навівши приклад. Відріжемо від прямокутника 2015×2016 прямокутник 2015×6 і розріжемо його на «куточки» (та частина, що залишається розрізається на прямокутники 1×2015). Легко зрозуміти, що для цього достатньо розрізати його на прямокутники 2×3 , оскільки вони розрізаються на «куточки» в очевидний спосіб. Для цього відріжемо прямокутник 2×6 (який розрізається на потрібні прямокутники), а прямокутник, що залишився, має розміри 2013×6 і теж розрізається на потрібні прямокутники, оскільки $2013:3, 6:2$.

2. Дано рівносторонній трикутник ABC . На продовженні сторони AB за точку A вибрано точку D , на продовженні сторони BC за точку C — точку E , на продовженні сторони AC за точку C — точку F так, що $CF = AD$ і $AC + EF = DE$. Знайти градусну міру кута BDE .

Відповідь. 60° .

Розв'язання. Добудуємо трикутник ACE до паралелограма $ACEG$. Оскільки $CF = AD$, $CE = AG$ і $\angle FCE = \angle DAG = 60^\circ$, то трикутники DAG і FCE рівні. Тоді $GD = EF$. З цього слідує, що $DE = AC + EF = GE + GD$. Отже, точка G належить відрізку DE , а тому $DE \parallel AC$, звідки $\angle BDE = \angle BAC = 60^\circ$.

3. Добре відомо, що $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менш відомо, що $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А чи для довільного натурального k існує $2k + 1$ послідовних натуральних чисел таких, що сума квадратів перших $k + 1$ із них дорівнює сумі квадратів останніх k ?

Відповідь. Так, для довільного.

Розв'язання. Спробуємо для кожного k знайти такий набір чисел. Позначимо середнє із них через a , тоді отримаємо, що це числа $a - k, \dots, a + k$. За умовою

$$(a - k)^2 + \dots + (a - 1)^2 + a^2 = (a + 1)^2 + \dots + (a + k)^2.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо коефіцієнти при рівних степенях a :

$$(k + 1)a^2 - 2(k + (k - 1) + \dots + 2 + 1)a + (k^2 + (k - 1)^2 + \dots + 1^2) = \\ = ka^2 + 2(k + (k - 1) + \dots + 2 + 1)a + (k^2 + (k - 1)^2 + \dots + 1^2).$$

Перенесемо всі доданки в ліву частину:

$$a^2 - 4(k + (k - 1) + \dots + 2 + 1)a = 0.$$

З цього слідує, що $a = 0$ або $a = 4(k + (k - 1) + \dots + 2 + 1)$. Другу із цих формул можна спростити. Якщо знайти суму арифметичної прогресії, то отримаємо $a = 2k(k + 1)$. При $a = 0$ деякі із чисел набору будуть від'ємними, а отже, не задовольняють умову задачі. В другому випадку всі числа набору додатні, оскільки $2k(k + 1) > k$. Таким чином, побудовано набір натуральних чисел, при якому виконується необхідна рівність.

4. Про попарно різні дійсні числа x, y, z відомо, що

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = t.$$

Знайти усі можливі значення, яких може набувати t .

Відповідь. 1 та -1 .

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$z = t - \frac{1}{x} = \frac{tx - 1}{x}, \\ y = t - \frac{1}{z} = t - \frac{x}{tx - 1} = \frac{t^2x - t - x}{tx - 1}.$$

Тоді

$$x + \frac{1}{y} = x + \frac{tx - 1}{t^2x - t - x} = t,$$

звідки за допомогою рівносільних перетворень приходимо до рівності

$$(t^2 - 1)(x^2 - tx + 1) = 0.$$

Таким чином, або $t = 1$, або $t = -1$, або $x^2 - tx + 1 = 0$. Останній випадок неможливий, оскільки тоді $x = y$, що суперечить умові задачі.

Залишається довести, що для $t = 1$ та $t = -1$ такі набори чисел існують. Справді, якщо, наприклад, $x = 2, y = -1, z = \frac{1}{2}$, то $t = 1$. При $x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = -2$ одержуємо $t = -1$.

5. В школі 30 гуртків, в кожному з яких займається 40 дітей. Для кожного $i = 1, 2, \dots, 30$ позначимо через n_i кількість дітей, які займаються рівно в i гуртках. Доведіть, що цій школі можна організувати 40 гуртків з 30 дітьми в кожному так, щоб числа n_i ($1 \leq i \leq 30$) для цих нових гуртків залишилися б тими ж самими.

Розв'язання. Випишемо в рядок членів першого гуртка, за ними — другого, потім — третього і т. д. При цьому, якщо дитина є учасником i k -го гуртка, i $(k + 1)$ -го гуртка, то його в списку $(k + 1)$ -го гуртка запишемо під тим самим номером, що i в списку k -го гуртка. Порізавши отриманий довгий список на «шматочки» по 30 учнів у кожному, отримаємо 40 нових гуртків, які задовольняють умову задачі. Справді, при цьому ніхто не попаде в один гурток двічі, оскільки відстань між двома входженнями в довгий список однієї і тієї ж дитини за побудовою не менша 40, а отже, i не менша 30. Крім цього, кількість дітей, які відвідують рівно i гуртків, вочевидь, залишається тією ж.