XXIII відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір Чемпіонів»

Математика. Розв'язання задач

Старша ліга

1. Многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ однакових степенів з цілими коефіцієнтами називаються *схожими*, якщо вони отримуються один з одного перестановкою коефіцієнтів (наприклад, схожими є многочлени $2x^3+x+7$ та x^3+2x^2+7x). При якому найбільшому значенні k для будь-яких схожих многочленів $P(x)$, $Q(x)$ число $P(2016)-Q(2016)$ обов'язково ділиться на k?

Відповідь. 2015.

Розв'язання. Зазначимо, що у схожих многочленів суми коефіцієнтів співпадають, тобто $P(1)=Q(1)$. Тоді 1 — корінь многочлена $P(x)-Q(x)$, тобто $P(x)-Q(x)=(x-1)\cdot R(x)$, де $R(x)$ — також многочлен з цілими коефіцієнтами. Тоді $P(2016)-Q(2016)=2015\cdot R(2016)$. З іншого боку, поклавши $P(x)=x+2$ та $Q(x)=2x+1$ бачимо, що більшого k не існує.

2. Знайти всі такі функції $f: R\to R$, для яких рівність $f(x^3+y^3)=x^2f(x)+y^2f(y)$ виконується для всіх дійсних x та y.

Відповідь. $f(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Покладемо $y=0$ і отримаємо $f\left(x^3\right)=x^2f(x)$. Бачимо, що $f(0)=0$.

Отже, $f\left(x^3+y^3\right)=f\left(x^3\right)+f\left(y^3\right)$. В силу довільності чисел x та y отримуємо $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

Подамо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x)=g(x)+cx$. Легко перевірити, що якщо $f(x)$ — розв'язок вихідного рівняння, то і функція $g(x)$ є його розв'язком. Покладемо $c=f(1)$, тоді $g(1)=0$. Крім цього, $g(0)=f(0)=0$. Отримуємо:

$$g\left((x+1)^3\right)=g\left(x^3\right)+3g\left(x^2\right)+3g(x)+g(1);$$
$$g\left((x+1)^3\right)=(x+1)^2g(x+1)=\left(x^2+2x+1\right)g(x)=g\left(x^3\right)+2xg(x)+g(x).$$

З цього слідує, що $3g\left(x^2\right)=2xg(x)-2g(x)$. В останню рівність замість x підставимо $-x$ і дістанемо, що

$$2xg(x)-2g(x)=-2xg(-x)-2g(-x). \qquad (1)$$

Зазначимо, що підставивши $y=-x$ в рівність $g(x^3+y^3)=x^2g(x)+y^2g(y)$ ми прийдемо до того, що $g(-x)=-g(x)$. Тоді рівність (1) набуде вигляду $-2g(x)=2g(x)$, звідки $g(x)\equiv 0$.

Отже, $f(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$. Безпосередньою перевіркою пересвідчуємось, що функції такого вигляду задовольняють умову.

3. Нехай t — пряма, яка проходить через вершину A рівностороннього трикутника ABC, паралельно до сторони BC. На стороні AC довільно відмітили точку D. Бісектриса кута ABD перетинає пряму t у точці E. Доведіть, що $BD=CD+AE$.

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 1).

Відкладемо на продовженні сторони AC, за точку C, відрізок $CE' = AE$. Оскільки $\angle BAE = 120° = \angle BCE'$, то $\triangle\ BAE = \triangle\ BCE'$ (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle ABE = \angle CBE'$. Тоді

$$\angle BE'D = \angle BE'C = \angle BEA = \angle CBE = \angle E'BD,$$

тобто $\angle BE'D = \angle E'BD$. А це означає, що трикутник BDE' — рівнобедрений. Таким чином,

$$BD = DE' = DC + CE' = DC + AE,$$

що і треба було довести.

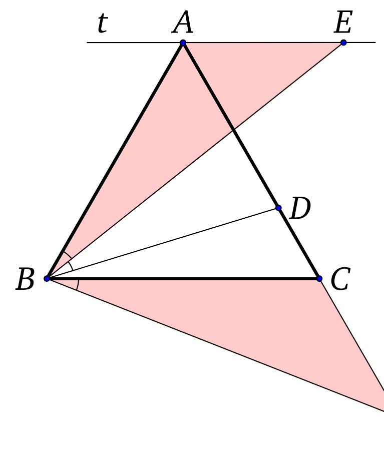

Рис. 1.

4. Доведіть, що рівняння $x^3 - y^2 = 2\,000\,000$ має хоча б два розв'язки в натуральних числах.

Розв'язання. Одним розв'язком рівняння є пара чисел $(300; 5000)$: $300^3 - 5000^2 = 2 \cdot 10^6$.

Інший розв'язок заданого рівняння шукатимемо у вигляді $(300 - t; 5000 - \lambda t)$:

$$(300 - t)^3 - (5000 - \lambda t)^2 = 2 \cdot 10^6.$$

Після розкриття дужок отримаємо кубічне рівняння відносно t, причому $t = 0$ — корінь рівняння, тобто рівняння зводиться до квадратного. Підбираючи λ, спробуємо перетворити в нуль коефіцієнт при t, щоб рівняння стало лінійним. Коефіцієнт при t дорівнює $10000\lambda - 3 \cdot 300^2$, звідки знаходимо, що $\lambda = 27$. Отримуємо $t = 900 - 27^2 = 171$, звідки отримуємо другу пару коренів: $x = 129$, $y = 383$.

5. Квадрат 8×8 розбито на 64 одиничних квадратики, кожний із яких повністю пофарбовано в білий або чорний колір, причому чорних одиничних квадратиків парна кількість. Дозволяється обрати довільні два одиничних квадратики «з'єднаних» ходом шахового коня та перефарбувати їх: чорний (чорні) — в білий колір, а білий (білі) — у чорний. Назвемо таку операцію *кроком*. Для довільного початкового розфарбування R (яке містить парну кількість чорних одиничних квадратів) означимо $S(R)$ як найменшу можливу кількість кроків, необхідну для перефарбування всіх одиничних квадратів в чорний колір (тобто ми бажаємо отримати копію відомої картини Малєвіча). Знайдіть найбільше можливе значення величини $S(R)$. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Очевидно, що кожний крок збільшує кількість чорних одиничних квадратів не більше ніж на 2. Якщо з самого початку всі клітинки білі (тобто є 0 чорних квадратів, 0 — парне число), то потрібно не менше $64 : 2 = 32$ кроків, щоб вони всі стали чорними. Тобто для початкового розфарбування «всі білі» $S(R) \geqslant 32$, і тому $S = \max S(R) \geqslant 32$.

Доведемо, що для довільного початкового розфарбування R, яке містить парну кількість одиничних квадратів, $S(R) \leqslant 32$, тобто не більше ніж за 32 кроки, можна отримати всі чорні квадратики. Тоді $S = \max S(R) \leqslant 32$. Якщо спочатку всі квадратики чорні (64 — парне число), то $S(R) = 0 \leqslant 32$. Нехай початкове розфарбування містить $2N$ білих одиничних квадратики, $1 \leqslant N \leqslant 32$. Розглянемо замкнений маршрут шахового коня, який проходить через всі 64 клітинки (одиничних квадратики) по одному разу (на мові графів: якщо вершини графа — одиничні квадратики, а ребра з'єднують ті, і тільки ті вершини, що «з'єднані» ходом шахового коня, то ми розглядаємо гамільтонів цикл цього графа). Існування такого маршруту є відомим фактом (див., наприклад, малюнок). Введемо на маршруті орієнтацію (виберемо довільно одну із двох). Пронумеруємо спочатку білі клітинки послідовними номерами від 1 до $2N$: одну із них назвемо першою, а решту нумеруємо вздовж орієнтованого маршруту шахового коня. Білу клітинку з номером j позначимо B_j, $1 \leqslant j \leqslant 2N$. Для зручності введемо $B_{2N+1} = B_1$.

Позначимо через l_j кількість кроків коня (вздовж орієнтованого маршруту) із клітинки B_j в клітинку B_{j+1}. Як тільки кінь потрапляє в B_{j+1}, то далі не йде. Зазначимо, що якщо кінь за n кроків може потрапити із клітинки X в клітинку Y $(X \neq Y)$, то використавши рівно n кроків, визначених в умові задачі, ми зможемо змінити колір клітинки X на «протилежний», колір клітинки Y на «протилежний», а колір решти клітинок не зміниться. Застосуємо це твердження до наших $2N$ білих клітинок. Клітинки B_1 та B_2 можна зробити чорними, не змінюючи колір решти клітинок за l_1 кроків. Після цього клітинки B_3 та B_4 можна зробити чорними за l_3 кроків, і так далі. В кінці клітинки B_{2N-1} та B_{2N} можна зробити чорними, не змінюючи колір решти клітинок, за l_{2N-1} кроків. Отже, всі клітинки можна зробити чорними за $l_1 + l_3 + \ldots + l_{2N-1}$ кроків. Далі зауважимо, що клітинки B_2 та B_3 можна зробити чорними, не змінюючи кольору решти клітинок за l_2 кроків. Після цього змінюємо колір клітинок B_4 та B_5 за l_4 кроків і так далі. В кінці B_{2N} та B_{2N+1} можна зробити чорними за l_{2N} кроків. Отже, всі клітинки можна зробити чорними за $l_2+l_4+\ldots+l_{2N}$ кроків. Оскільки $(l_1+l_3+\ldots+l_{2N-1})+(l_2+l_4+\ldots+l_{2N}) = 64$ (для розглядуваного маршруту), то хоча б один із двох доданків не перевищує $64 : 2 = 32$, а описаний вище спосіб перефарбування всіх одиничних квадратиків в чорний колір, який відповідає цьому доданку, складається не більше, ніж з 32 кроків. Таким чином, для довільного початкового розфарбування R маємо, що $S(R) \leqslant 32$. Отже, ми довели, що $S(R) \leqslant 32$ та $S(R) \geqslant 32$, тобто $S = \max S(R) = 32$.

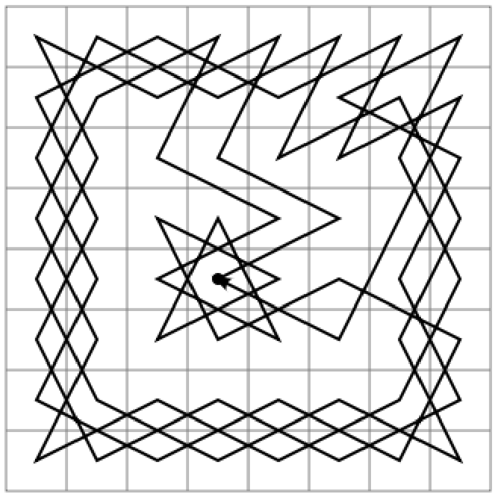

Рис. 2.