

Разбор задачи «Упаковка конфет»

Для начала определим порядок целей (от наиболее важной до наименее):

1. Выпустить L упаковок
2. Минимизировать количество конфет в машине на момент остановки
3. Минимизировать время на достижение такого состояния

Исходя из этого общая стратегия – остановить машину как только будет достигнуто минимальное по сумме конфет состояние и при этом уже выпущено минимум L упаковок. Момент, когда машина выдаст не менее L упаковок, определяется однозначно и, по сути, является ограничением снизу на время работы машины.

Общее состояние машины определяется как набор остатков a_1, a_2, \dots, a_N . Так как все эти остатки повторяются с периодом K , то и общее состояние машины повторяется с таким же периодом (процесс циклический). Соответственно, любое минимальное по сумме конфет состояние будет повторяться с таким же периодом. Исходя из этого можно преобразовать изначальную стратегию к такому виду:

1. Выбрать одно из минимальных состояний как конечное
2. Довести машину до этого состояния из начального
3. Выполнять циклы машины полностью (по K секунд) пока не будет выпущено L упаковок (с учетом выпущенных при доведении до выбранного состояния)

В итоге минимизация полного времени работы полностью зависит от выбора конечного состояния (одного из минимальных по сумме конфет, так как это более приоритетное требование чем время работы).

Что бы определить минимальные по сумме состояния необходимо знать сумму только для состояний из первых K секунд (из цикличности). Важно заметить, что на самом деле нам не нужны все K состояний, а только те, в которые происходит опустошение какого-либо резервуара (всего таких максимум N). О остальные моменты сумма только растет и такие состояния заведомо не минимальные.

Отсортируем резервуары по остаткам в порядке возрастания (d_1, d_2, \dots, d_N) и для каждого из резервуаров определим сумму остатков в момент когда он опустошается. Резервуар i опустошается в момент $K - d_i$. К этому моменту к начальной сумме S прибавилось $(K - d_i)N$, но при этом $N - i + 1$ резервуаров опустошилось к этому же моменту (так как они имели большие либо равные остатки на начало) и сумма уменьшилась на $(N - i + 1)K$. В итоге на момент опустошения резервуара i сумма остатков S_i , время на достижение из начального состояния T_i и число выпущенных пакетов P_i равны:

$$\begin{aligned}T_i &= K - d_i \\P_i &= (N - i + 1) \\S_i &= S + T_i N - P_i K\end{aligned}$$

Так же не следует забывать, что начальное состояние так же может быть одним из минимальных.

Конечное состояние из минимальных нужно выбрать такое, которое минимизирует общее время $Time$ работы машины. Зная для состояния число выпущенных упаковок (P) и затраченное время (T) на переходе от начального состояния суммарное время $Time$ определяется исходя из стратегии:

$$Time = T + \lceil \frac{L - P}{N} \rceil K$$

Конечный алгоритм решения:

1. Для каждого из резервуаров посчитать P_i , T_i и S_i
2. Для тех состояний, у которых S_i минимальное, посчитать суммарное время $Time$
3. Выбрать минимальное $Time$ и вывести его как ответ